

УДК 51.74

О ПОСТРОЕНИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИИ МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Кутергин Владимир Алексеевич, д.т.н, профессор, Институт прикладной механики Уральского отделения
Российской Академии Наук

Аннотация

В статье рассматриваются особенности моделей движения механических систем, адекватных задачам инженера, построение и преобразование моделей движения механической системы. Статья состоит из двух частей.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: механическая система, движение механических систем, уравнения движения, построение модели движения, преобразование моделей.

Abstract

Peculiarities of models of mechanical systems motion (adequate to the engineering problem) as well as construction and reformation of the models are viewed in the following article. The article contains two parts.

KEYWORDS: mechanical system, mechanical systems motion, motion equations, construction of motion model, models reformation.

ЧАСТЬ 1.

1. Особенности моделей движения механических систем, адекватных задачам инженера

Создание математической модели имитационного типа требует отображения в ней структурно-функциональных особенностей механической системы (МС) и таким образом, чтобы с ее помощью инженер мог изучить функциональные свойства, осуществить выбор необходимой структуры и параметров МС и затем извлечь из модели план построения будущей МС.

Создание моделей МС, адекватных задачам инженера, наталкивается на ряд трудностей.

Во-первых, Лагранжем указан универсальный метод вывода уравнений движения механических и электромеханических систем. Однако на практике те, кто сталкивался с необходимостью получения с его помощью моделей движения для достаточно сложной

системы, оказываются в затруднении, увидев сложность выкладок и необозримость получаемых уравнений. Поэтому многие прибегают к более упрощенным методам, основанным на принципе Даламбера, принципе наименьшего принуждения Гаусса, или используя аналогии методов анализа электромеханических сетей.

Во-вторых, в модели, построенной на базе классических методов, исчезает из поля зрения то, из чего строилась модель МС: элементы, связи, структура, функция. Все это как бы «растворяется» в ней и находится в неявном виде. Поэтому любое изменение с одним из указанных объектов приводит к необходимости построения уравнений движения заново.

В-третьих, в построенных моделях трудно определить сходство и различие между МС, понять функционально- и системообразующие свойства. Осуществлять операции представления уравнений в новых системах координат, в которых или уравнения движения или связи становятся более простыми, а решения более эффективными. Осуществлять операции преобразования уравнений к виду, совместному с целью или программой движения, и тем самым строить уравнения целенаправленных движений.

Если рассмотреть, из чего состоит МС, то можно обнаружить, что модели ее исходных элементов нам хорошо известны из физики. Модели материальной точки, твердого тела, пружины или демпфера и т.п. в механике, записанные в простейшей, как правило, ортогональной системе координат, сопровождают нас еще со школы. Типы связей для различного рода механизмов, их классификация по количеству отнимаемых степеней свободы, а также их модели содержатся в теории машин и механизмов. Там же можно обнаружить классификацию механизмов: рычажные, кулачковые, плоские, пространственные, по назначению и т.п., и их модели, чаще всего представленные на кинематическом уровне. Однако построение уравнений динамики движения даже для таких простых систем, как движение материальной точки по заданной или произвольной поверхности, или уравнений динамики движения системы взаимосвязанных твердых тел, наверняка вызовет затруднения. Трудности построения модели МС, состоящей из неоднородных элементов, между которыми действуют нелинейные связи, имеющие сложную структуру, усиливаются, когда становится необходимым разобраться в явлениях, происходящих при взаимодействии элементов. Что происходит с моделями элементов МС, когда они объединяются посредством разного типа связей в систему? Что происходит с явлениями, когда инженеру приходится «разрезать» систему на части и соединять разъединенные части иным образом? Как отразить структуру взаимодействия между элементами в модели МС и причем явно, для того, чтобы уметь прогнозировать развитие явлений при ее изменении? Можно продолжить этот перечень вопросов. Они постоянно

возникают у инженера, который занимается изучением природы искусственного объекта, своего рода инженерной физикой. И если физика – это теория пространства с инвариантами той или иной физической величины, то каждому классу МС будет соответствовать своя возможная структура пространства и, следовательно, модельная теория, со своим набором физико-технических инвариантов. Для того чтобы более строго понимать, с геометрической точки зрения, как строится пространство, имеющее структуру той или иной модели МС, мы еще раз воспользуемся примерами описания и построения механического движения. Рассмотрим то пространство, которое скрывается за достаточно традиционными задачами механики Ньютона и механики управляемого движения.

1. Если мы хотим наблюдать за движением, то для этого необходимы два объекта. Один – это некоторая система отсчета, связанная с наблюдателем. Другой – это тот, за движением которого наблюдают. Число координат, которое определяет положение объекта в пространстве, соответствует числу измерений. Каждая независимая координата соответствует одному измерению пространства. Наблюдения за движением необходимо датировать, т.е. относить получаемые измерения к определенному моменту времени. Поскольку измерения по каждой координате являются независимыми, то для изображения положения точки в механике обычно применяют три взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в одной точке. Такая система координат называется ортогональной. Плоскости, определяемые парой осей, называются координатными плоскостями. Точку пересечения осей называют началом координат. Все множество положений, а следовательно значений координат, которое может принимать точка A , носит название элементов исходного пространства, а само пространство, как говорят математики, однородно.

2. Рассмотрим геометрическую точку A в качестве движущегося объекта. Проведем через точку A три прямые, параллельные координатным плоскостям. Расстояния от точки A до координатных плоскостей будут единственными и называются декартовыми координатами точки. Число независимых координат определяет размерность пространства и, одновременно количество степеней свободы точки A . Уточним интуитивное понимание движения – как изменение во времени координат точки A . Совокупность пройденных при движении положений точки A образует путь, каждая часть которого будет его элементом. Из двух элементов пути один может быть частью другого, в этом случае они отличаются только по величине. Два элемента пути, исходящие из одного и того же положения, могут принадлежать двум различным путям. В этом случае ни один из них не может быть частью другого. Тогда они различаются не только по величине, но имеют также и различные направления. Путь движения точки будет прямым, если все элементы пути будут иметь

одинаковые направления, и криволинейным, если направления элементов изменяется от положения к положению. В качестве критерия кривизны пути можно рассмотреть скорость изменения направления в связи с изменением положения точки A . Если определить координаты как функции времени, то мы определим то, что в кинематике называют законом движения. Дифференцируя координатные функции по времени один раз, а затем второй, можно получить скорость и ускорение движения точки. При этом если речь идет о кинематике, то нам совершенно безразлично каким образом (способом) получено это движение. Если закон движения точки задан, то движение точки A полностью определено. Если закон движения не известен, то число степеней свободы максимально и совпадает с числом независимых координат.

Под уравнениями движения будем понимать любое уравнение, вытекающее из феноменологических законов Ньютона и определяющее соотношение между производными координат и силами. Уравнения движения для материальной точки можно записать в форме второго закона Ньютона: произведение массы точки на ее ускорение равно равнодействующей всех сил. Силы, которые в механике разделяют на два вида: внешние (действующие на систему извне) и внутренние (действующие между точками системы, в частности реакции связей), являются основной причиной движения. В теории пространства уравнения движения задаются в виде инвариантных отношений между геометрическими объектами, заданными в некоторой частным образом выбранной системе координат. Введение в представляющее пространство законов движения, например, материальной точки, изменяет структуру пространства. Между скоростями движения его точек устанавливаются связи, определяемые формой закона Ньютона. Изменяется и понятие масштаба измерения такого пространства. Возможность измерения в нем вводится через понятие метрики пространства.

Важной особенностью законов Ньютона, и, следовательно, представляющих эти законы пространств, является утверждение о существовании инерциальных систем отсчета, подразумевающих наличие определенных свойств симметрии времени и пространства. Эти добытые из опыта свойства говорят о том, что время в этих пространствах однородно, а пространство однородно и изотропно. Однородность во времени заключается в том, что протекание физических явлений в одних и тех же условиях в разное время их наблюдения одинаково. Иначе говоря, различные моменты времени эквивалентны по своим физическим свойствам. Однородность и изотропность пространства заключается в том, что свойства пространства одинаковы в различных точках (однородность), а в каждой точке одинаковы во всех направлениях (изотропность).

Идея причинности играла основную роль в становлении классической физики. Ньютон в своих «Началах» сформулировал правила рассуждений, которые определяли структуру его теории. В этих правилах причинность занимает центральное место. Так, согласно Ньютону, исследуя явления, прежде всего, необходимо выяснить те причины, которые достаточны для объяснения явления, а в случае аналогичных явлений следует искать аналогичные причины. Сила – это та причина, которая порождает движения и все изменения состояний материального объекта. Закон инерции гласит, что без действия силы состояние тела не меняется – это есть закон сохранения количества движения (или закон сохранения причинности). В конструктивных процессах, связанных с преобразованием искусственной или естественной среды, цель – вот причина изменения состояния этой среды. Другое дело, что эта причина сама является искусственным продуктом деятельности человека. Поэтому цель может служить истинной причиной преобразований только тогда, когда она актуализируется в определенной ресурсной среде, становится объектом наших потребностей, в определенном смысле Воли, о которой говорил Ньютон и реализуется посредством конструирования определенных свойств пространства, т.е. его структуры.

3. В пространство, в котором движется материальная точка, мы можем вносить различные геометрические объекты, например поверхности, линии, кривые и т.п. Это обусловлено нашими дополнительными представлениями о пространстве модели МС, поскольку точка A в системе по нашему требованию может двигаться, например, вдоль линии или по некоторой поверхности. Такие объекты появляются уже в соответствии с нашими намерениями придать движению целесообразный вид, т.е. вид, отвечающий нашим целям. Сами геометрические объекты могут служить моделями типов связей, используемых в механике, или моделями программ движения, используемых в механике управляемого тела. Этими действиями мы изменяем наше представление о пространстве – оно приобретает структуру. Структура пространства может говорить нам о том, что не все положения точки A являются разрешенными (запрещенными), не все направления скорости и ускорения движения точки A допустимыми. Например, если движение точки принадлежит некоторой плоскости, то и скорости движения данной точки будут также принадлежать той же плоскости. Задавая в виде геометрических объектов плоскость или поверхность в трехмерном пространстве и заставляя материальную точку двигаться так, чтобы и положения и скорости движения точки A принадлежали данным объектам, мы тем самым конструируем наше представление о пространстве, потенциальном множестве положений и движений точки A . Пространство, в котором происходит движение, становится двумерным. Находясь в таком двумерном пространстве, мы естественно интересуемся только теми объектами,

которые принадлежат ему. Но вместе с тем, изучая «строительный материал», из которого создается та или иная структура пространства, нам постоянно приходится иметь в виду исходные объекты и пространство, которому они принадлежали. Действительно, мы сначала могли построить трехмерное пространство, задать в нем закон движения точки A , а затем попытаться изменить его. Для этого поместить в трехмерное пространство такой объект как поверхность, и заставлять точку A двигаться по этой поверхности. Естественно, что такой геометрический объект как скорость изменится и по величине и по направлению, но вместе с тем все его составляющие (в том числе и потерянные скорости) принадлежат исходному трехмерному пространству.

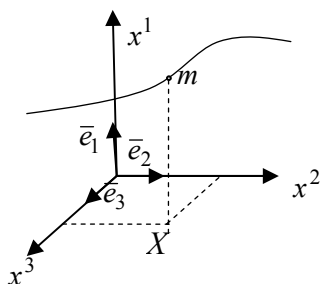
4. Мир движений в выбранном пространстве очень разнообразен. Причина этому не только в разнообразии свойств элементов и действующих на них сил, но и огромном разнообразии типов связей, различной природы. Например, голономные связи или программы движения, можно задать в виде поверхностей, которые могут изменять свое положение во времени, и/или деформироваться во времени. Можно задавать ограничения на скорости движения точки разнообразными формами дифференциальных связей (неголономные связи). С помощью специально построенных или отобранных геометрических объектов, представляющих из себя модели кинематических связей, программ движения, можно построить такую структуру пространства, которая могла бы «заставить» точку A совершать любые наперед заданные движения. Иначе говоря, *всякое данное уравнение, конечное или дифференциальное, относительно координат материальной точки, представляет собой связь (ограничение), поскольку оно выражает условие, в силу которых точка совершает или должна совершить не то движение, которые ей стремятся сообщить приложенные силы.* Создавая пространство движения точки, мы могли бы сделать его таким, что не все положения и скорости движения точки A оказались бы разрешенными, а только те, которые обращают в тождества данные уравнения. В тех случаях, когда связи запрещают движения в определенных направлениях, то тем самым уменьшается количество степеней свободы движения материальной точки. Если скорости движения материальной точки имеют ограничения, например, когда, в каждой точке трехмерного пространства скорости движения точки принадлежат некоторой плоскости, то число степеней свободы материальной точки не изменится. В тоже время число свобод у скорости движения точки будет на одну меньше. Множество возможных движений материальной точки, которое мы могли наблюдать при наложении ограничений, зависело бы еще от начального положения и начальных скоростей движения точки A .

Выбор подобного рода геометрических объектов в качестве инструментов реализации заданных движений бывает весьма ограничен, но естественно не математически, а технически. Просто в той или иной предметной области мы часто не знаем или не умеем воплощать их в виде материальных схем кинематического или программного движения, или, наоборот, знаем, что подобная реализация привела бы нас к ограничениям другого рода (габариты, надежность, точность и т.п.).

2. Связь между уравнениями Ньютона в криволинейном пространстве Y^3 в базисе $\{\bar{e}_j\}_\alpha$ и уравнениями Лагранжа II рода.

Начнем с простейших моделей поведения элементов систем, например, материального тела, обладающего массой.

Пусть уравнение движения тела заданы в декартовых координатах:



$$m\ddot{x}^i = F_{iX} \quad (1)$$

где: $i = 1, 2, 3$, X – буква, обозначающая исходную систему координат.

Поставим задачу. Построить уравнение движения материального тела в произвольном криволинейном пространстве Y^3 , которое связано с исходным 3-мерным пространством X^3 совокупностью функций:

$$y^j = y^j(x^1, x^2, x^3) \quad (2)$$

Где $j = 1, 2, 3$, $y^j = y^j(x^i) \in C^2$, C^2 – класс гладкости.

В этом случае каждой точке $x^i \in X^3, i = 1...3$; ставится в соответствие новый набор координат y^j , где $j = 1, ..., 3$. Криволинейные координаты мы можем вводить не обязательно для всего пространства в целом, а лишь для некоторой области в нем. Тогда функции, предполагается, что заданы только для этой области. Потребуем, чтобы для преобразования (2) существовало обратное преобразование:

$$x^i = x^i(y^1, y^2, y^3) \quad (3)$$

где $i = 1, 2, 3$

Т.е. система функций (2) однозначно разрешима относительно x^i . Как известно, в этом случае необходимо иметь определитель Якобиана преобразования, отличный от нуля. Введем новый базис

$$\left\{ \partial x^i / \partial y^j \right\}_\alpha \bar{e}_i = \bar{t}_j \quad (5)$$

где $\bar{e}_i$ – базис единичных векторов пространства X^3 ; $\bar{t}_j$ – базис пространства Y^3 , заданный в окрестности произвольной точки α .

Поскольку метрический тензор пространства X^3 совпадает с дельтой Кронекера, перепишем уравнения движения материальной точки в виде:

$$b_{ij} \ddot{x}^j = m \delta_{ij} \ddot{x}^j = F_{Xi} \quad (6)$$

где: $b_{ij} = m \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$; m – масса, F_{Xi} – вектор сил, заданный в системе координат X^3

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

Построим модель движения материальной точки в базисе $\{\bar{t}_j\}$ пространства Y^3 .

Для этого умножим уравнение (6) слева и справа на $\frac{\partial x^i}{\partial y^s}$, получим:

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^s} b_{ij} \ddot{x}^j = \frac{\partial x^i}{\partial y^s} F_{Xi} \quad (7)$$

Уравнение (7) представляет собой равенство геометрических объектов, заданных в α -области пространства Y^3 в локальной системе координат $\{\bar{t}_s\}_\alpha$, $s = 1, 2, 3$.

Преобразование (7) вводит представление каждого геометрического объекта, стоящего слева и справа уравнения (6), в новой системе координат, определяемой базисом $\{\bar{t}_s\}_\alpha$, индуцированным преобразованием (2).

Представим вектор ускорения $\ddot{x}^j$ в криволинейных координатах. Для этого продифференцируем дважды уравнение (3):

$$\begin{aligned} \dot{x}^j &= \frac{\partial x^j}{\partial y^s} \dot{y}^s; \\ \ddot{x}^j &= \frac{\partial x^j}{\partial y^s} \ddot{y}^s + \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^s \partial y^k} \dot{y}^s \dot{y}^k \end{aligned} \quad (8)$$

Подставим (8) в уравнение (7), получим:

$$b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^\sigma} \ddot{y}^\sigma + \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^\sigma \partial y^k} \dot{y}^\sigma \dot{y}^k \right) = \frac{\partial x^i}{\partial y^s} F_{Xi} \quad (9)$$

или

$$g_{s\sigma} \ddot{y}^\sigma + \Gamma_{s,\sigma k} \dot{y}^\sigma \dot{y}^k = Q_s \quad (10)$$

где: $g_{s\sigma} = b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial x^j}{\partial y^\sigma}$

$$\Gamma_{s,\sigma k} = b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^\sigma \partial y^k}$$

$$Q_s = \frac{\partial x^i}{\partial y^s} F_{X_i}$$

Таким образом, уравнения движения материальной точки в криволинейном пространстве могут быть представлены в форме (10).

Уравнения (10) представляют собой ковариантную форму движения материальной точки в пространстве Y^3 , имеющем метрику, определяемую тензором $g_{s\sigma}$.

Полученные уравнения, с одной стороны, есть скалярная форма закона Ньютона, представленного в произвольной криволинейной системе координат, с другой, – явный вид уравнения Лагранжа II рода.

Действительно, уравнения Лагранжа II рода имеют форму:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}^s} - \frac{\partial T}{\partial y^s} = Q_s$$

Где T – кинетическая энергия точки; y^s – обобщенные криволинейные координаты; $s = 1, 2, 3$. Q_s – обобщенная сила, заданная своими проекциями на обобщенные координаты.

Представим кинетическую энергию точки T в исходном пространстве :

$$T = b_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = m \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

Вычислим левую часть уравнений Лагранжа второго рода, получим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}^s} = b_{ij} \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial \dot{y}^s} \dot{x}^i = b_{ij} \dot{x}^i \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial \dot{y}^s}$$

Продифференцируем (3) один раз по времени, получим:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \dot{y}^s, \text{ и следовательно}$$

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{y}^s} = \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \quad (11)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}^s} &= b_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial y^s} \dot{x}^i \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}^s} &= b_{ij} \ddot{x}^j \frac{\partial x^i}{\partial y^s} + b_{ij} \dot{x}^i \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial y^s} = b_{ij} \ddot{x}^j \frac{\partial x^i}{\partial y^s} + \frac{\partial T}{\partial y^s} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}^s} - \frac{\partial T}{\partial y^s} &= b_{ij} \ddot{x}^j \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \end{aligned} \quad (12)$$

Из соотношения (12) видно, что оператор Лагранжа $\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}^s} - \frac{\partial}{\partial y^s} \right)$ над скалярной функцией $T(y, \dot{y})$ есть ничто иное как преобразование ковариантного геометрического объекта в пространство Y^3 , определяемое базисом $\{\bar{t}_s\}_\alpha$

Построим выражения для обобщенных сил. Для этого рассмотрим скаляр элементарной работы сил, являющийся инвариантной величиной, которая не зависит от ее представления в произвольной системе координат. Его величина не зависит от выбранной системы координат или сохраняется в любой произвольной системе координат Y^3 , поэтому:

$$dA = Q_s dy^s = F_{Xi} dx^i$$

Или

$$Q_s dy^s = F_{Xi} \frac{dx^i}{dy^s} dy^s$$

И как следствие

$$\left(Q_s - F_{Xi} \frac{dx^i}{dy^s} \right) dy^s = 0$$

Откуда, т.к. дифференциал dy^s совершенно произволен, получим

$$Q_s = F_{Xi} \frac{dx^i}{dy^s} \quad (13)$$

Из выражения (13) видно, что обобщенная сила в уравнениях Лагранжа второго рода представляет собой преобразование ковариантного вектора F_{Xi} в новую систему координат, определяемую базисом $\{\bar{t}_j\}_\alpha$.

Из изложенного можно сделать следующее заключение: уравнение Лагранжа второго рода представляет собой скалярную форму уравнения Ньютона, заданного в криволинейном пространстве Y^3 , в локальном базисе $\{\bar{t}_j\}_\alpha$.

3. Уравнения Ньютона в криволинейном пространстве Y^3 , в сопряженном базисе $\{\bar{t}^j\}_\alpha$

Рассмотрим совокупность трех векторов

$$\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \bar{e}^i = \bar{t}_\alpha^j \right)$$

здесь: $i, j = 1, 2, 3$; $\bar{e}^i$ – контравариантный базис пространства X^3 ; для ортогональной декартовой системы координат $\bar{e}^i = \bar{e}_i$; набор векторов $\{\bar{t}^j\}_\alpha$; $j = 1, 2, 3$ представляет собой

базис сопряженного пространства Y_*^3 (* – звездочка будет обозначать сопряженные объекты).

Между базисами $\{\bar{t}_s\}_\alpha$ и $\{\bar{t}^j\}_\alpha$, выполняется условие взаимности (ортогональности):

$$(\bar{t}_s \cdot \bar{t}^j)_\alpha = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)_\alpha = \delta_s^j$$

где: $s, j = 1, 2, 3$; δ – символ Кронекера.

Построим уравнения движения материальной точки в пространстве Y_*^3 , в базисе $\{\bar{t}^j\}_\alpha$. Для этого представим уравнения движения материальной точки в пространстве X^3 , в контравариантной форме:

$$\ddot{x}^i = b^{ij} F_{Xj} \quad (14)$$

Используя закон преобразования контравариантных векторов, умножим (14) слева и справа на матрицу преобразования $\frac{\partial y^s}{\partial x^i}$, получим:

$$\frac{\partial y^s}{\partial x^i} \ddot{x}^i = \frac{\partial y^s}{\partial x^i} b^{ij} F_{Xj} \quad (15)$$

Подставляя вместо $\ddot{x}^i$ – определение ускорения через криволинейные координаты, а также представим F_{Xi} в базисе $\{\bar{t}^j\}_\alpha$. В результате получим:

$$\frac{\partial y^s}{\partial x^i} \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \ddot{y}^j + \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^\sigma \partial y^k} \dot{y}^\sigma \dot{y}^k \right) = \frac{\partial y^s}{\partial x^i} b^{ij} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} Q_k$$

Или

$$\delta_j^s \ddot{y}^j + \frac{\partial y^s}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^\sigma \partial y^k} \dot{y}^\sigma \dot{y}^k = g^{sk} Q_k \quad (16)$$

Где: $s, i, j, k, \sigma = 1, 2, 3$; $Q_k = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} F_{Xi}$;

$g^{sk} = b^{ij} \frac{\partial y^s}{\partial x^i} \frac{\partial y^k}{\partial x^j}$ – метрический тензор пространства Y_*^3

Уравнения (16) можно записать в следующей контравариантной форме:

$$\ddot{y}^s + \Gamma_{\sigma k}^s \dot{y}^\sigma \dot{y}^k = g^{sk} Q_k \quad (17)$$

Где $\Gamma_{\sigma k}^s = \frac{\partial y^s}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^\sigma \partial y^k}$ – трехиндексный символ Кристоффеля I рода.

Мы видим, что данная форма представления закона Ньютона разрешена относительно старшей производной и пригодна для непосредственного интегрирования при задании начальных условий. В приложениях это может быть большим преимуществом, поскольку

получение преобразования (3) (обратное преобразование) бывает достаточно сложным или трудоемким, особенно когда речь идет о пространствах большой размерности.

Таким образом, уравнение движения материальной точки в пространстве Y^3 , представляет собой второй закон Ньютона, заданный в координатном пространстве, определяемом базисом $\{\bar{t}^j\}_\alpha$.

Мы могли выбрать для представления уравнений движений материальной точки и другие, смешанные базисы криволинейного пространства. Например, два базисных вектора из пространства Y^3 и один из пространства Y_*^3 , или наоборот, и так, чтобы в силу условия взаимности координатный вектор из сопряженного подпространства Y_*^3 был бы ортогонален двум векторам координатного пространства Y^3 .

В этом случае уравнение движения материальной точки могут иметь несколько другую форму. Выбор координатного базиса представляет собой некоторый конструктивный акт, позволяющий инженеру или физiku подобрать такую форму представления уравнений движения, которая более соответствует поставленной задаче, позволяет упростить расчеты или сделать более наглядной интерпретацию изучаемого явления.

4. Уравнения Ньютона в ковариантных переменных, в криволинейном пространстве

Y^3 в базисе $\{\bar{t}_i\}_\alpha$ уравнения Гамильтона.

Рассмотрим формы представления кинетической энергии материальной точки в произвольной криволинейной системе координат. Поскольку кинетическая энергия – суть скалярная величина, то ее значение в различных системах координат остается неизменным.

Используя роль фундаментального тензора g_{ik} пространства Y^3 , связанного с операцией поднятия или опускания индекса, введем в рассмотрение ковариантную переменную y_i :

$$g_{ik} \dot{y}^k = \dot{y}_i = p_i$$

где: p_i – обобщенный импульс движения материальной точки.

Тогда кинетическая энергия материальной точки может быть представлена несколькими формами:

$$T = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{y}^i \dot{y}^k = \frac{1}{2} \dot{y}_i \dot{y}^i = \frac{1}{2} g^{ik} \dot{y}_i \dot{y}_k = \frac{1}{2} g^{ik} p_i p_k = \quad (18)$$

где: $i, k, s = 1, 2, 3$;

$$g_{ik} g^{ks} = \delta_i^s;$$

g_{ik} – метрический тензор пространства Y^3 , g^{ks} – метрический тензор пространства Y^3 .

Воспользуемся уравнениями Лагранжа II рода и определим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}^s} &= (g_{ks} \dot{y}^k + g_{ks} \dot{y}^s \delta_s^k) \frac{1}{2} = g_{ks} \dot{y}^k = \dot{y}_s \\ \frac{\partial T}{\partial y^s} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^s} \dot{y}^i \dot{y}^k \end{aligned} \quad (a)$$

Поскольку новыми переменными являются ко-векторы $\dot{y}_i$, которые представляют собой импульсы материальной точки, т.е. $p_i = \dot{y}_i = g_{ik} \dot{y}^k$ и поэтому

$$\dot{y}^k = g^{ki} p_i \quad (b)$$

где: $g^{ik} = (g_{ik})^{-1}$

$$\begin{aligned} \text{или} \\ i, k, r = 1, 2, 3; \end{aligned} \quad g_{ki} g^{ri} = \delta_k^r \quad (c)$$

Заменяя в выражении (a) $\frac{\partial T}{\partial y^s}$ и $\dot{y}_k$ при помощи соотношения (b), получим:

$$\frac{\partial T}{\partial y^s} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^s} g^{ri} g^{ik} p_r p_t$$

где: $i, k, r, s, t = 1, 2, 3$.

Учитывая соотношение (c), получим:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^s} g^{ri} = - \frac{\partial g^{ri}}{\partial y^s} g_{ik}$$

Поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial y^s} = - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{ri}}{\partial y^s} g_{ik} g^{ik} p_r p_t = - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{rk}}{\partial y^s} \delta_i^t p_r p_t = - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{ri}}{\partial y^s} p_r p_i \quad (d)$$

Откуда левую часть уравнения движения материальной точки, учитывая выражение (12), можно представить в форме:

$$\ddot{y}_s + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{ik}}{\partial y^s} \dot{y}_i \dot{y}_k = \frac{\partial x^i}{\partial y^s} b_{ij} \ddot{x}^j \quad (19)$$

Из уравнения следует, что выражение в левой части равенства (19), является представлением ковариантного вектора силы инерции в пространстве Y^3 , в базисе $\{\bar{t}_i\}_\alpha$.

Добавив к левой части выражения (19) определение контравариантного вектора скорости материальной точки:

$$\dot{y}^k = g^{ks} \dot{y}_s$$

можно получить явный вид уравнений движения материальной точки в форме Гамильтона:

$$\begin{cases} \ddot{y}_s = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{ik}}{\partial y^s} \dot{y}_i \dot{y}_k + Q_s \\ \dot{y}^k = g^{ks} \dot{y}_s = g^{ks} p_s \end{cases} \quad (20)$$

Если ввести замену обозначений $p_i = \dot{y}_i$; и ввести в рассмотрение скаляр

$$H = T = \frac{1}{2} g^{ik} p_i p_k \quad (21)$$

то система уравнений Гамильтона примет канонический вид:

$$\begin{cases} \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial y^s} + Q_s \\ \dot{y}^k = \frac{\partial H}{\partial y_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{cases} \quad (22)$$

Из равенства (21) видно, что скалярная функция Гамильтона представляет собой иную форму представления кинетической энергии материальной точки, выраженную через ковариантные скорости движения (импульсы) (см. 18).

5. Уравнения движения материальной точки в криволинейной системе координат, зависящей от времени.

Построим уравнения движения материальной точки в системе криволинейных координат, которая меняется не только при переходе от точки к точке, но и в каждой точке с течением времени. Для этого рассмотрим следующий вид преобразования :

$$y^s = y^s(x^i, t), \quad i, s = 1, 2, 3 \quad (23)$$

которое определяется совокупностью гладких функций и ставит в соответствие каждой точке $x^i \in X^3$, при заданном времени t , новый набор координат y^s , где y^s – произвольные криволинейные координаты.

Точно также как и для преобразования, которое не зависит от времени, будем предполагать, что y^s вводятся не для всего пространства в целом, а лишь для некоторой области в нем.

Потребуем от преобразования (23), чтобы в окрестности произвольной точки α некоторой произвольной области выполнялось условие аналитичности (взаимной однозначности и дифференцируемости) преобразования

$$\left| \frac{\partial y^s}{\partial x^i} \right| \neq 0 \quad (24)$$

во всех точках области определения x^i .

Ограниченный таким образом класс преобразований образует группу.

Рассмотрим преобразование дифференциалов, заданных в разных системах криволинейных координат:

$$dy^s = \frac{\partial y^s}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial y^s}{\partial t} dt \quad (25)$$

При этом $\frac{\partial y^s}{\partial x^i}(x^i, t)$ и $\frac{\partial y^s}{\partial t}(x^i, t)$ являются функциями точки пространства и времени. Это говорит о том, что локальная система координат определяемая объектом $\frac{\partial y^s}{\partial x^i}$ изменяется не только при переходе от одной точки пространства к другой, но и с течением времени.

Закон преобразования для дифференциала dy^s не соответствует закону преобразования для контравариантного вектора. Тем не менее, мы сможем получить обратный закон преобразования для уравнения (25). Умножим правую и левую часть равенства (25) на величину обратную

$$\left(\frac{\partial y^s}{\partial x^i} \right)^{-1} = \frac{\partial x^i}{\partial y^s},$$

получим:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^s}(y^s, t) dy^s + \frac{\partial x^i}{\partial t} dt \quad (26)$$

От равенства (26) мы можем перейти к конечным векторам. Для этого правую и левую часть равенства поделим на dt , получим

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \frac{\partial x^i}{\partial y^s}(y^s, t) \dot{y}^s + \frac{\partial x^i}{\partial t} \\ \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{y}^s} &= \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \end{aligned} \quad (27)$$

Вместе с тем из равенства (25), если его поделить на ∂t , следует:

$$\dot{y}^s = \frac{\partial y^s}{\partial x^i}(x^i, t) \dot{x}^i + \frac{\partial y^s}{\partial t}(x^i, t) \quad (28)$$

Откуда

$$\frac{\partial \dot{y}^s}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial y^s}{\partial x^i} \quad (29)$$

Теперь, если в исходном пространстве X^3 в некоторой точке α определить локальный ортогональный трехгранник векторами $\bar{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, то в каждый момент времени в пространстве Y^3 можно выполнить построение локального векторного базиса $\bar{e}_s^\nabla$, $s = 1, 2, 3$ следующим образом:

$$\left\{ \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \right\}_\alpha \bar{e}_i = \left\{ \bar{e}_s^\nabla \right\}_\alpha \quad (30)$$

Где : $\{\bar{e}_s^\nabla\}_\alpha$ – определяют векторный базис криволинейной системы координат в заданной точке α и при заданном моменте времени t . ∇ – означает, что это векторы нового базиса пространства Y^3 .

Данное множество векторов можно рассматривать как базис трехмерного пространства $T^3(y^s)_\alpha$, заданный в окрестности произвольной точки α касательно к многообразию определяемому преобразованиями (25) для некоторого момента времени $t = t_0$. Однако, заданная таким образом тройка векторов с течением времени изменяется. Поэтому локальную систему координат трех векторов $\{\bar{e}_s^\nabla\}_\alpha$, образующую локальное пространство $T^3(y^s)_\alpha$ можно назвать мгновенной.

Для построения уравнений движения материальной точки в произвольной системе координат, изменяющейся во времени, воспользуемся снова вторым законом Ньютона в форме

$$b_{ij}\ddot{x}^j = F_i \quad (31)$$

где $b_{ij} = \delta_{ij}m$; $i, j = 1, 2, 3$;

δ_{ij} – символ Кронекера, определяющий в данном случае метрику пространства X^3 .

Рассмотрим его как равенство двух ковариантных векторов, которое можно представить в осях локального базиса $\{\bar{e}_s^\nabla\}_\alpha$ следующим образом:

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^s} b_{ij} \ddot{x}^j = \frac{\partial x^i}{\partial y^s} F_i \quad (32)$$

Теперь произведем замену переменных в соответствии с тем, что:

$$\ddot{x}^j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^s} (y^k, t) \dot{y}^s + \frac{\partial x^j}{\partial t} (y^k, t) \right) = \frac{\partial x^j}{\partial y^s} \ddot{y}^s + \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^s \partial y^k} \dot{y}^s \dot{y}^k + 2 \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^k \partial t} \dot{y}^k + \frac{\partial^2 x^j}{\partial t^2} \quad (33)$$

В результате замены переменных уравнения движения материальной точки в произвольной системе координат, изменяющейся во времени, можно представить следующим образом:

$$g_{sk} \ddot{y}^k + \Gamma_{s,kr} \dot{y}^k \dot{y}^r + \Gamma_{sk} \dot{y}^k + \Gamma_s = Q_s \quad (34)$$

где: $s, k, r = 1, 2, 3$

$$g_{sk} = b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial x^j}{\partial y^k}; \quad \Gamma_s = b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial^2 x^j}{\partial t^2}$$

$$\Gamma_{s,kr} = b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^k \partial y^r}; \quad Q_s = \frac{\partial x^i}{\partial y^s} F_i$$

$$\Gamma_{s,k} = 2b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^k \partial t}$$

Можно показать, что данное уравнение остается инвариантным для стационарных и нестационарных систем криволинейных координат. Если определить обобщенную силу как

$$Q_s^* = Q_s - \Gamma_{s,k} \dot{y}^k - \Gamma_s \quad (35)$$

то уравнениям движения материальной точки можно придать вид:

$$g_{sk} \ddot{y}^k + \Gamma_{s,kr} \dot{y}^k \dot{y}^r = Q_s^* \quad (36)$$

Форма данного тензорного уравнения совпадает с уравнениями движения материальной точки в криволинейной системе координат.

Уравнения (34) можно представить иначе:

$$g_{sk} \left(\ddot{y}^k + \Gamma_{lr}^k \dot{y}^l \dot{y}^r + \Gamma_l^k \dot{y}^l + \Gamma^k \right) = Q_s \quad (37)$$

где: $g_{sk} = b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial x^j}{\partial y^k}$ метрический тензор пространства Y^3 .

$$\Gamma_{lr}^k = g^{sk} \Gamma_{s,lr}; \quad g^{sk} = (g_{sk})^{-1}$$

$$\Gamma_l^k = g^{sk} \Gamma_{sl}; \quad \Gamma^k = g^{ks} \Gamma_s; \quad s, k, l, r = 1, 2, 3.$$

Скалярное уравнение (37) представляет собой инвариантное равенство, которое сохраняет свою форму в любой реономной криволинейной системе координат. В правой части равенства (37) вектор, т.е. тензор валентности два, поэтому по обратному тензорному признаку, определяем то, что находится в скобках уравнения (37) вектор.

Данный вектор представляет собой ускорение, которое задано в подвижной криволинейной системе координат $\{\bar{e}_s^\nabla\}_\alpha$:

$$a^k = \left(\ddot{y}^k + \Gamma_{lr}^k \dot{y}^l \dot{y}^r + \Gamma_l^k \dot{y}^l + \Gamma^k \right) \quad (38)$$

Вводя обозначение для вектора ускорения согласно (38) уравнению (37) может придать форму закона Ньютона:

$$g_{ik} a^k = Q_i \quad (39)$$

Существует взаимосвязь между коэффициентами кинетической энергии и геометрическими объектами, входящими в уравнение (34). Эту связь можно получить, выводя уравнение движения материальной точки в нестационарной системе координат в соответствии с формализмом Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}^s} - \frac{\partial T}{\partial y^s} = Q_s$$

Определим T :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} b_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^s} \dot{y}^s + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^k} \dot{y}^k + \frac{\partial x^j}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \dot{y}^s \dot{y}^k + 2 b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial x^j}{\partial t} \dot{y}^s + b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial x^j}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (g_{sk} \dot{y}^s \dot{y}^k + 2 g_s \dot{y}^s + g_0) \end{aligned} \quad (40)$$

Где

$$g_{sk} = b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial x^j}{\partial y^k}; \quad g_s = b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial x^j}{\partial t}; \quad g_0 = b_{ij} \frac{\partial x^i}{dt} \frac{\partial x^j}{\partial t}$$

Получим составляющие члены уравнений Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}^s} &= g_{sk} \dot{y}^k \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}^s} &= g_{sk} \ddot{y}^k + \frac{\partial g_{sk}}{\partial y^l} \dot{y}^k \dot{y}^l \\ \frac{\partial T}{\partial y^s} &= \frac{\partial}{\partial y^s} \left(\frac{1}{2} g_{lk} \dot{y}^l \dot{y}^k \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lk}}{\partial y^s} \dot{y}^l \dot{y}^k \end{aligned}$$

Уравнения можно привести к следующему виду:

$$g_{sk} \ddot{y}^k + \left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial y^l} \dot{y}^k \dot{y}^l - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lk}}{\partial y^s} \dot{y}^l \dot{y}^k \right) = Q_s \quad (41)$$

Где Q_s – обобщенная сила.

Выражение в скобках не симметрично относительно индексов l и k .

Выполним следующее преобразование:

$$\left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial y^l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lk}}{\partial y^s} \right) \dot{y}^k \dot{y}^l = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{sk}}{\partial y^l} \dot{y}^k \dot{y}^l + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{sk}}{\partial y^l} \dot{y}^k \dot{y}^l - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lk}}{\partial y^s} \dot{y}^k \dot{y}^l \quad (42)$$

Последовательно заменяя немые индексы, несколько преобразуем вторую часть выражения (42):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{sk}}{\partial y^l} \dot{y}^k \dot{y}^l = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{sl}}{\partial y^k} \dot{y}^l \dot{y}^k = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{sl}}{\partial y^k} \dot{y}^k \dot{y}^l \quad (43)$$

Тогда выражение (41) можно переписать в виде:

$$\left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial y^l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lk}}{\partial y^s} \right) \dot{y}^k \dot{y}^l = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial y^l} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial y^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial y^s} \right) \dot{y}^k \dot{y}^l$$

Обозначим выражение в правой части уравнения (43) как

$$\Gamma_{s,kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial y^l} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial y^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lk}}{\partial y^s} \right) \quad (44)$$

Используя выражение (43) уравнения (41) примут известный вид:

$$g_{sk} \ddot{y}^k + \Gamma_{s,kl} \dot{y}^k \dot{y}^l = Q_s$$

Где: $s, k, l = 1, 2, 3$; $\Gamma_{s,kl}$ – трехиндексный символ Кристоффеля.

$\Gamma_{s,kl} = \Gamma_{s,lk}$ – объект симметричен относительно последних двух индексов.

Теперь можно показать взаимосвязь между геометрическими объектами, входящими в форму кинетической энергии (40) и геометрическими объектами, входящими в форму уравнения (34):

$$\begin{aligned}\Gamma_{s,kl} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial y^l} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial y^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial y^s} \right) = b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^k \partial y^l} \\ \Gamma_{s,k} &= \left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial t} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial y^k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial y^s} \right) = b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^k \partial t} \\ \Gamma_{s,k} &= \left(\frac{\partial g_s}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_0}{\partial y^s} \right) = b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial^2 x^j}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (45)$$

Где: индекс r – уравнения (34) заменен на l поскольку данный индекс – «немой».

В справедливости полученных соотношений можно убедиться непосредственно вычисляя левые части выражений (45). Проверим, например, последнее равенство.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial g_s}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_0}{\partial y^s} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial^2 x^j}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^s} \left(b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial x^j}{\partial t} \right) = \\ &= b_{ij} \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^s \partial t} \frac{\partial x^j}{\partial t} + b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial^2 x^j}{\partial t^2} - b_{ij} \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^s \partial t} \frac{\partial x^j}{\partial t} = b_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \frac{\partial^2 x^j}{\partial t^2}\end{aligned}$$

– что и убеждает в справедливости полученных соотношений.

Еще раз подчеркнем, что уравнения движения материальной точки в криволинейной системе координат изменяющейся во времени по существу представляет собой уравнение Ньютона, заданное в базисе криволинейных координат:

$$\left\{ \partial x^i / \partial y^s \right\}_\alpha \bar{e}_i = \left\{ \bar{e}_s^\nabla \right\}_\alpha;$$

в пространстве Y^3 :

$$\frac{dx^i}{dy^s} b_{ij} \ddot{x}^j = \frac{dx^i}{dy^s} F_i \quad (46)$$

где $\ddot{x}^j$ и F_i здесь специально показаны в проекциях на координатный базис $\{\bar{e}_i\}$

пространства X^3

Продолжение в следующем выпуске.

Литература:

1. Корнев Г.В. Цель и приспособляемость движений. – М.: Наука, 1974. – 528с.
2. Крон Г. Тензорный анализ сетей. – М.: Сов. Радио, 1980.
3. Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика. – М.: Наука, 1972.
4. Синдж Д.Л. Тензорные методы в динамике. – М.: ИЛ, 1947.
5. Кутергин В.А. Искусственные объекты и конструктивные процессы. Изд- во: ИПМ УрО РАН, г. Ижевск 2007, 551стр.