УДК 65.012.26

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТРЕХЗНАЧНЫХ ЦИФРОВЫХ НЕЙРОНОВ

Денис Владимирович Калитин, кандидат технических наук, доцент Московского государственного горного университета (МГГУ)

Аннотация

В статье рассматривается стратегия проектирования 3х-значных нейронов сотовой структуры на заданную функцию 3х-значной логики. Настройка нейронов на заданную функцию, осуществляется с помощью вычисления оптимального орбитального центра и устранения ряда противоречий. Предложенный метод избавлен от недостатка предыдущих методов настройки цифрового нейрона на заданную функцию, а именно целочисленного решения систем уравнений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: цифровой нейрон, граф, 3х-значная логика, функция.

DESIGNING 3-DIGIT NEURONS

Denis Kalitin the Candidate of Technical Science, Associate Professor of the Moscow state mountain university (MSMU)

Abstract

The article deals with the strategy of designing 3-valued neurons cellular structure on a given function of 3-valued logic. Setting up the neurons to a given function is performed by calculating the optimal orbital center and eliminating a number of contradictions. The proposed method is free of the shortcomings of the previous methods of setting the digital neuron for a given function, namely, the integer solutions of systems of equations.

KEYWORDS: digital neuron, graph, 3-valued logic, function.

Одним из перспективных цифровых нейронов является нейрон сотовой структуры [1], функция возбуждения $j\,(X)$ которого имеет вид:

$$j\,(X) = \sum_i w_i x_i = \begin{cases} 1, \text{если} \sum_i w_i x_i = P_j \\ 0, \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad (1)$$

где P_j — квазипорог нейрона, множество квазипорогов $\{P_j\}$ эмулирует порог P, w_i — вес синапса x_i.

Сумма весов $\sum_i w_i$ определяет сложность нейрона $L(j\,)$

$$L(j\,) = \sum_i w_i \qquad (2)$$

площадь “кремния”, реализующего его. В настоящее время цифровые нейроны промышленного назначения в России и США являются 4-синапситескими.

Обобщая структуру двузначного сотового нейрона (рис. 1, а), проф. А.В. Горбатов предложил [2] структуру k-значного однородного нейрона, локальная топология которого представлена на рис. 1 в. На этом рисунке неперечёркнутая дуга соответствует ключу, инициируемому при $x = k - 1$, остальные дуги соответствуют ключам, включаемым при $x = k$

– 1 – α, где α — количество перечёркиваний дуги. Используя предложенную структуру однородных нейронов (рис. 1 а, б), на рис. 2 а, б представлены структуры однородных двузначного и трёхзначного нейронов соответственно.

Математическим описанием предлагаемых однородных *k*–значных нейронов является выражение (3):

$$j^{\,j}(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_s) = \begin{cases} 1, \text{ если } \sum_{i=1}^{s} w_i x_i = T_k^j \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{3}$$

где $j^{\,j}$ — функция возбуждения *j*–ой фазы выходного синапса нейрона: $j^{\,j} = 1 \leftrightarrow j = j,\ j \in \{0,1,\mathbf{K},k-1\}$, w_i — вес *i*-го синапса, T_k^j — квазипорог нейрона, находящегося в *j*–м состоянии; множество квазипорогов $\{T_k^j\}$ моделируют порог при возбуждении нейрона в *j*–м состоянии.

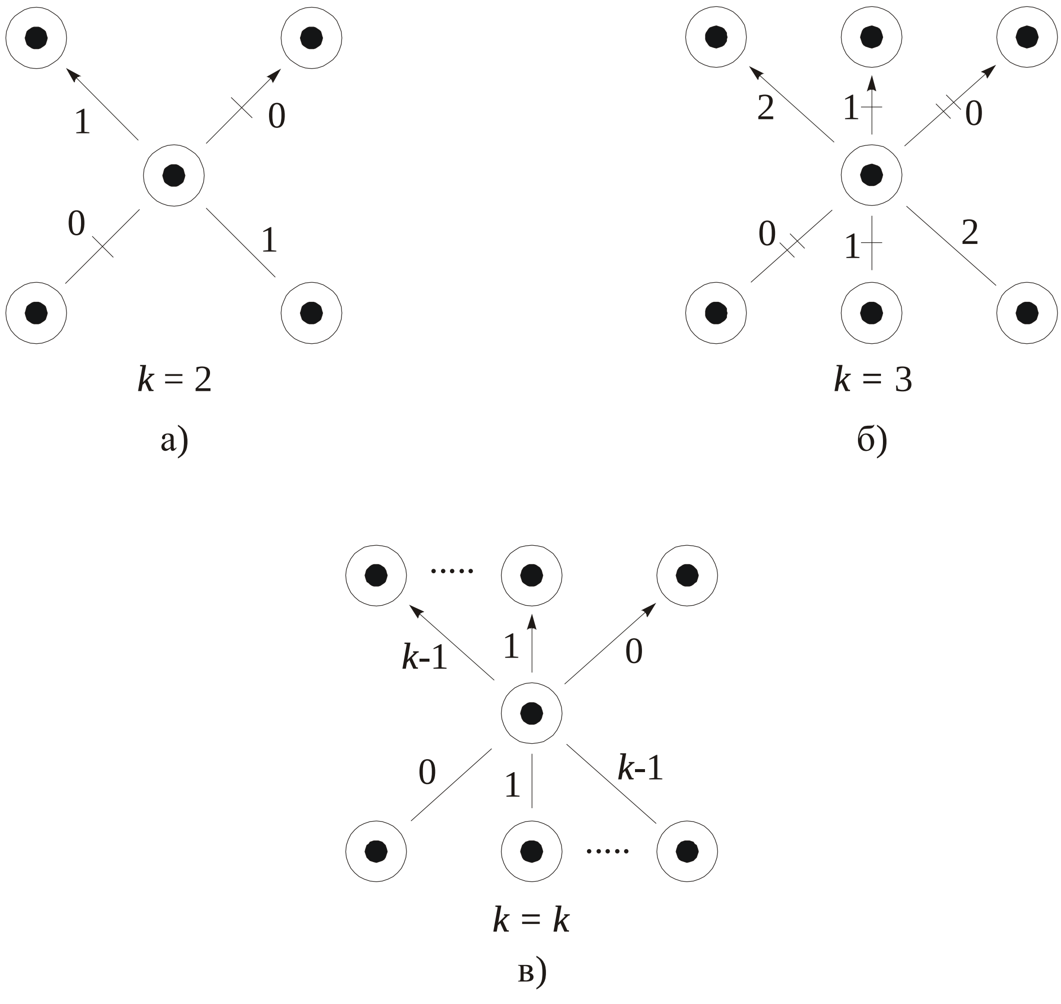
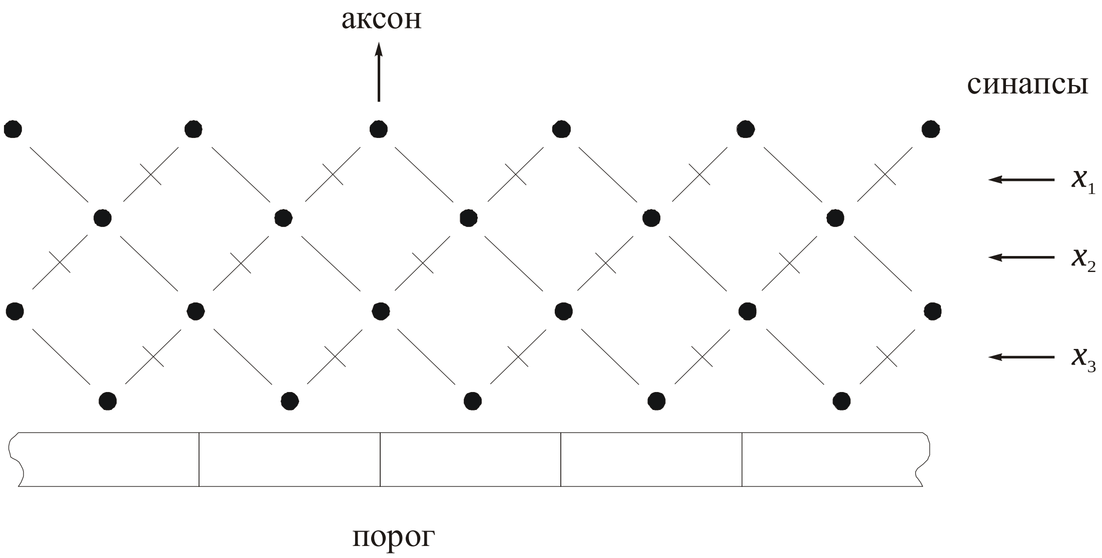
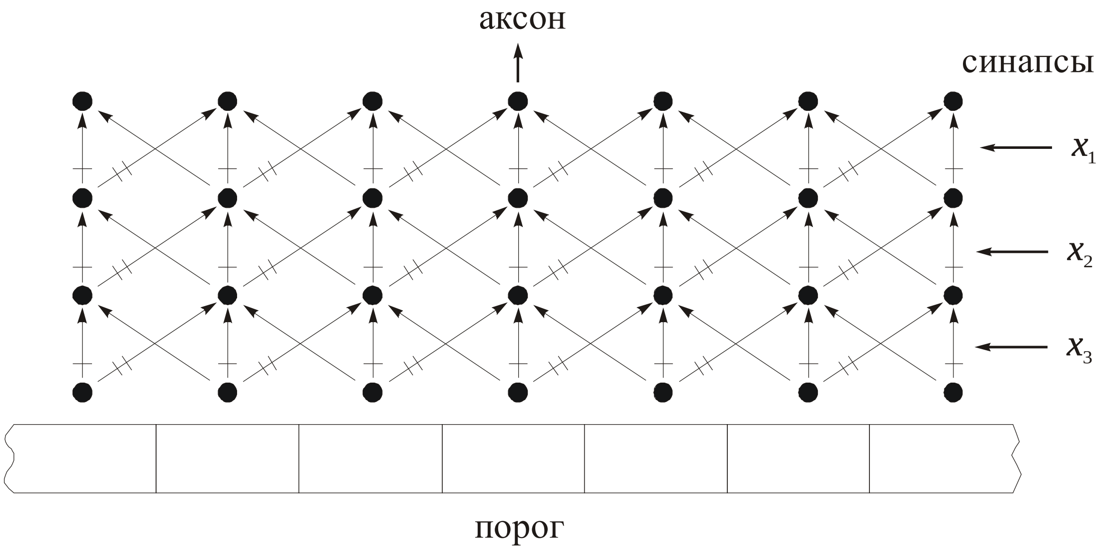


Рис. 1. Обобщая структуру двузначного сотового нейрона



а)



б)

Рис. 2. Структуры однородных двузначного и трёхзначного нейронов

В статье предложена стратегия эффективной настройки k-значного сотового нейрона, исключающая трудоёмкую процедуру целочисленного решения “k” взаимосвязанных систем. Стратегия основана на орбитально непротиворечивое вложение заданной функции в k-значный гиперкуб.

Определение 1.

Орбитой относительно центра X_C в k-значном пространстве называется множество точек $\{X_i\}$, равноудалённых от центра X_C:

$$\{X_i\} = \{X_i / R(X_C, X_i) = const\}, \tag{4}$$

где $R(X_C, X_i)$ – радиус точки X_i относительно центра X_C, равный минимальному расстоянию между точками X_i и X_C.

Очевидно, что радиус $R(X_C, X_i)$ равен сумме модулей разностей между значениями соответствующих разрядов векторов $X_C = (x_{C1}, x_{C2}, \mathbf{K}, x_{Cn})$ и $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \mathbf{K}, x_{in})$:

$$R(X_C, X_i) = \sum_{j=1}^{n} \left| x_{Cj} - x_{ij} \right|. \tag{5}$$

Определение 2.

Распределение по орбитам относительно центра X_C значений реализуемой k-значной функции называется непротиворечивым, если на каждой орбите не найдётся хотя бы двух точек, в которых эта функция принимает различные значения, при этом функция называется “непротиворечивой”, относительно центра X_C или орбитально непротиворечивой.

Утверждение 1.

Вес каждого синапса k-значного сотового нейрона равен “1”, если найдётся непротиворечивое распределение по орбитам относительно центра X_C значений реализуемой k-значной функции $f(X)$ (орбитально непротиворечивого вложения функции в k-значный гиперкуб).

Стратегия эффективной настройки k-значного сотового нейрона при реализации произвольной k-значной функции $f(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n)$ сводится к построению орбитально непротиворечивой k-значной функции $f(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_{n+\Delta n})$, эквивалентирующей заданную функцию.

Рассмотрим предлагаемую стратегию на примере.

Пусть задана 3-значная функция $f(x_1, x_2, x_3)$ вида:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0 \text{ на } 2, 3, 7, 11, 20, \\ 1 \text{ на } 1, 9, 17, 25, \\ 2 \text{ на } 4, 15, 21. \end{cases}$$

3-значный 3-местный гиперкуб имеет 7 орбит: 0-й орбите соответствует точка 0, 1-й орбите − точки 1, 4, 9; …; 6-й орбите точка 26. Распределение значений заданной функции по орбитам относительно центра 0 представлено на рис. 3, при этом номер орбиты равен сумме цифр вектора, определяющего точку этой орбиты.

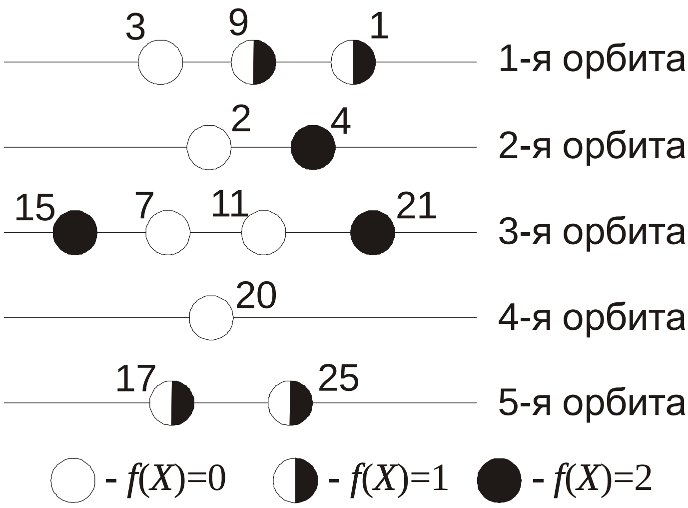


Рис. 3. Распределение значений функции по орбитам относительно центра

Для оценки распределения значений функции введём отношение противоречивости R_2: две точки X_{ia}, X_{ib} одной и той же i-ой орбиты находятся в отношении R_2, если и только если $\{X_{ia}, X_{ib}\} \in R_2 \leftrightarrow f(X_{ia}) \neq f(X_{ib})$.

Каждое распределение P_a значений функции будем оценивать L суммой сигнатур графов противоречивости $G_{пр\,i} = \langle V_i, U_i \rangle$, определяемых отношением R_2:

$$L(P_a) = \sum_{i=0}^{(k-1)\cdot n} |U_i| . \tag{6}$$

Первое распределение P1 (см. рис.3) оценивается числом 7: 2+1+4=7 (рис.4).

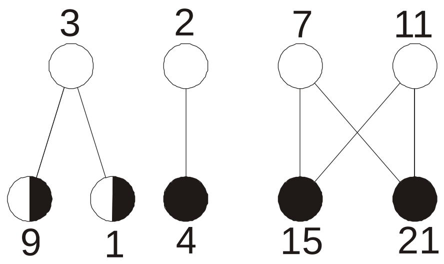


Рис. 4. Первое распределение заданной функции

Очевидно, что каждая компонента связности графа противоречивости $G_{пр}$ взаимнооднозначно соответствует определённому номеру орбиты.

Последовательно производим расщепление переменных, определяем соответствующее распределение значений, производим согласно (6) их оценку и выбираем расщепление переменной которому соответствует минимальное значение (6).

Расщепляем переменную x_1,

$x_1 \to x_1', x_1''$:

$$f\left(x_1', x_1'', x_2, x_3\right) = \begin{cases} 0 \text{ на } 0002, 0010, 0021, 1102, 2202, \\ 1 \text{ на } 0001, 1100, 1122, 2221, \\ 2 \text{ на } 0011, 1120, 2210. \end{cases}$$

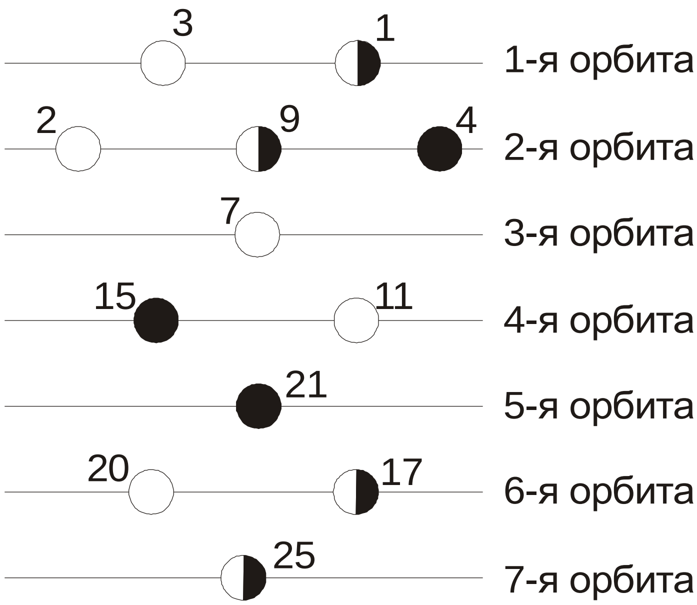


Рис. 5. Второе распределение заданной функции

Оценка второго распределения (рис.5) – $L(P_2)$=1+3+1+1=6 (рис. 6).

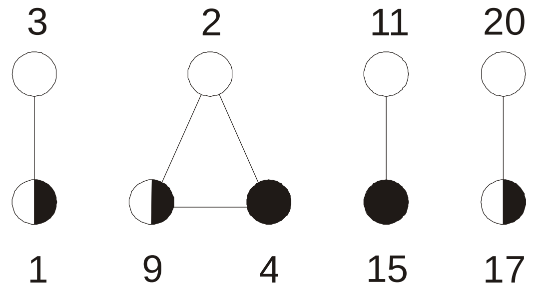


Рис. 6. Оценка второго распределения заданной функции

Расщепляем переменную x_2,

$x_2 \to x_2', x_2''$:

$$f\left(x_1, x_2', x_2'', x_3\right) = \begin{cases} 0 \text{ на } 0002, 0110, 0221, 1002, 2002, \\ 1 \text{ на } 0001, 1000, 1222, 2221, \\ 2 \text{ на } 0111, 1220, 2110. \end{cases}$$

Оценка третьего распределения (рис. 7) – $L(P_3)$=1+1+1=3 (рис. 8).

Расщепляем переменную x_3:

$x_3 \to x_3', x_3''$:

$$f\left(x_1, x_2, x_3', x_3''\right) = \begin{cases} 0 \text{ на } 0022, 0100, 0211, 1022, 2022, \\ 1 \text{ на } 0011, 1000, 1222, 2211, \\ 2 \text{ на } 0111, 1200, 2100. \end{cases}$$

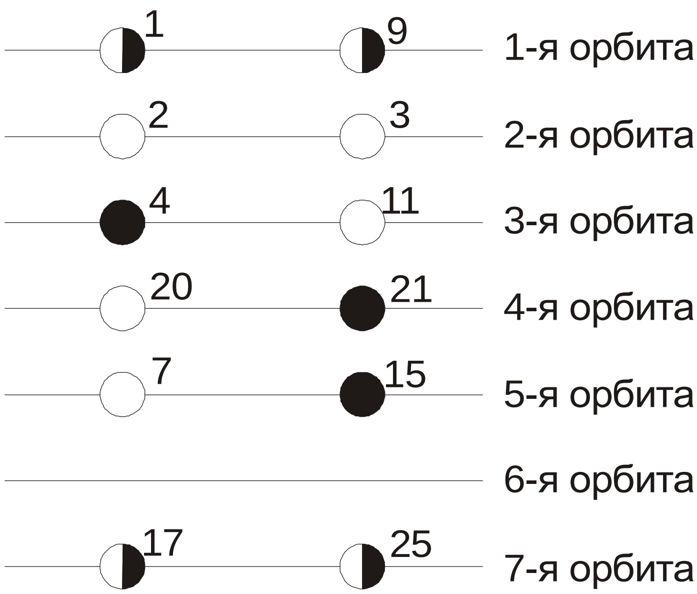


Рис. 7. Третье распределение заданной функции

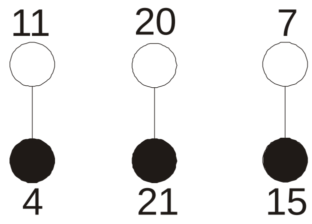


Рис. 8. Оценка третьего распределения заданной функции

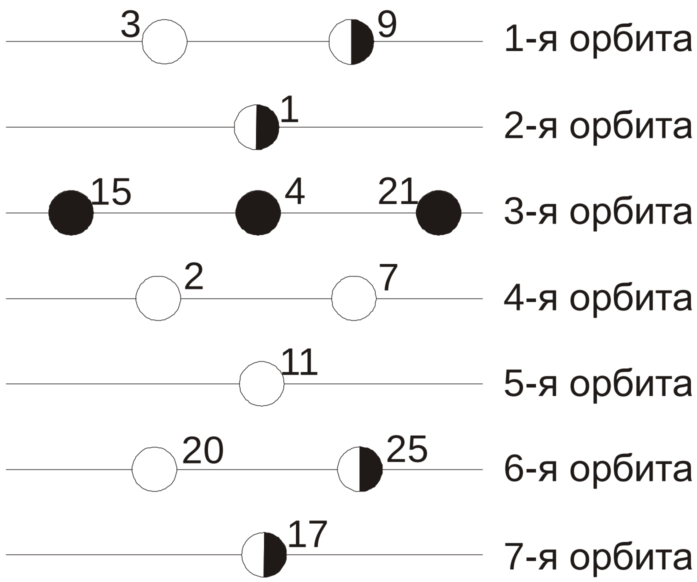


Рис. 9. Четвертое распределение заданной функции

Оценка четвёртого распределения (рис. 9) – $L(P_4)$=1+1=2 (рис. 10).

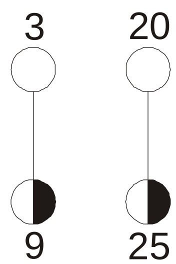


Рис. 10. Оценка четвертого распределения заданной функции

1-е противоречие: $\{3,9\} \in R_2$

2-е противоречие: $\{20,25\} \in R_2$

Для устранения выявленных противоречий кроме x_3 расщепляем ещё x_2 (рис. 11).

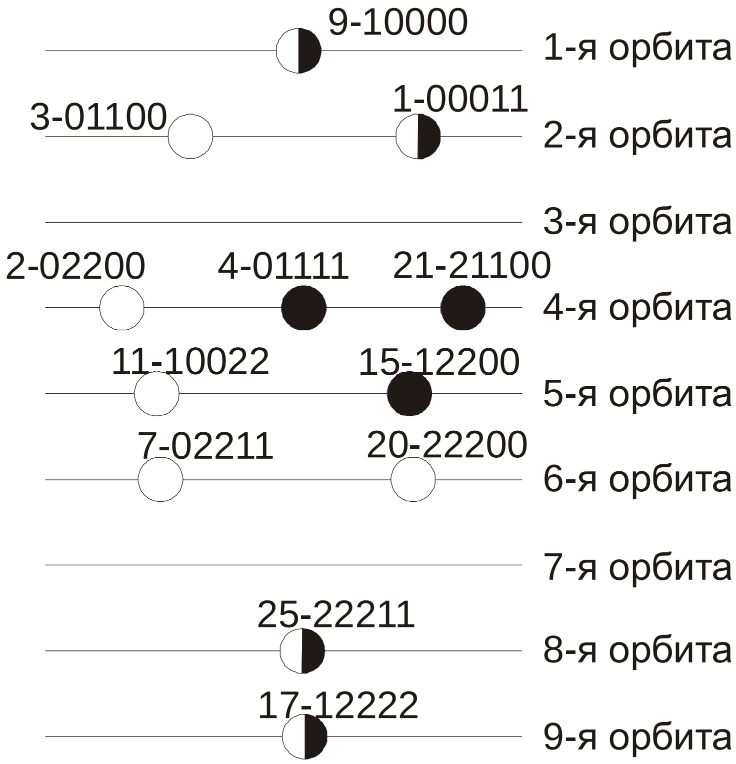


Рис. 11. Расщепление переменных X_2, X_3

Оценка пятого расщепления (рис. 11) – $L(P_5)$=4, получили повышение оценки: $L(P_5) > L(P_4)$.

Для уменьшения оценок $L(P_4)$ и $L(P_5)$ очевидно, что необходимо расщепить x_3 не на две, а на три переменные: $x_3 \to x_3', x_3'', x_3'''$, при этом получаем орбитально непротиворечивое распределение значений исходной функции $f(x_1, x_2, x_3)$ (рис. 12).

Оценка 6-го распределения (рис. 12) равна 0. Следовательно, функция $f(x_1, x_2', x_2'', x_3', x_3'', x_3''')$, эквивалентирующая заданную функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, является орбитально непротиворечивой.

Отсюда веса синапсов x_1, x_2, x_3 соответственно равны $w(x_1) = 1$, $w(x_2) = 2$, $w(x_3) = 3$.

Для определения квазипорогов для каждой фазы, строим соответствующие системы уравнений, при этом модель нейрона имеет вид (7):

$$\sum_i w_i \cdot x_i = T_{kj}, \qquad (7)$$

где w_i – вес i-го синапса xi, Tkj – j-й квазипорог k-й фазы нейрона.

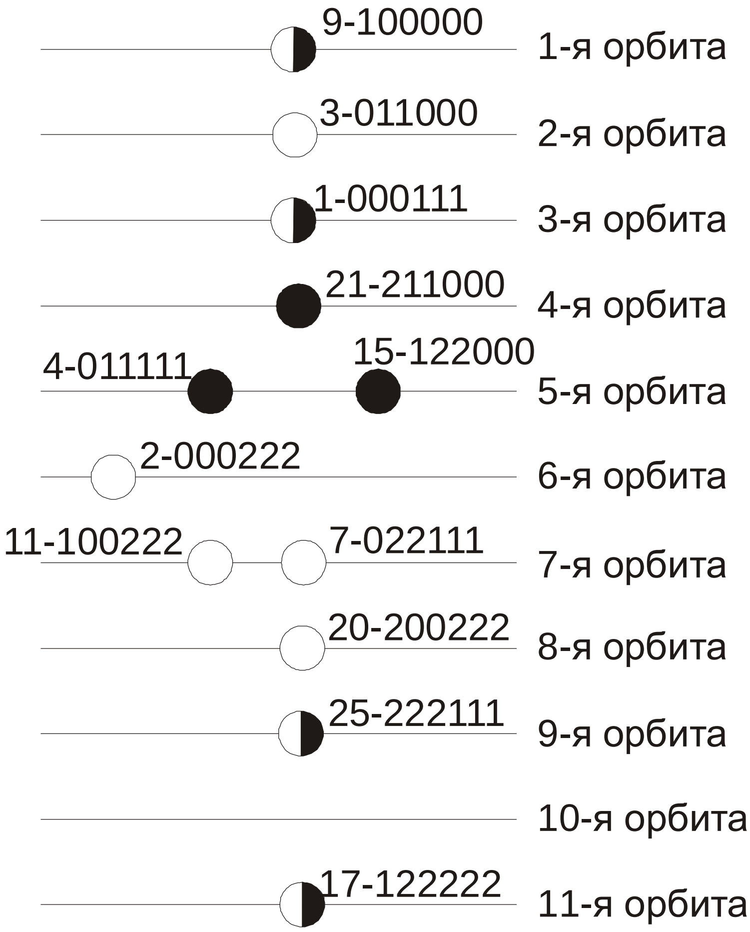


Рис. 12. Оценка шестого распределения заданной функции

Система 0-й фазы:

$$\begin{cases} 2 \to 002 & : \quad 2 \cdot w_3 = T_{01} \to 2 \cdot 3 = 6, \\ 3 \to 010 & : \quad w_2 = T_{02} \to 2, \\ 7 \to 021 & : \quad 2 \cdot w_2 + w_3 = T_{03} \to 2 \cdot 2 + 3 = 7, \\ 11 \to 102 & : \quad w_1 + 2 \cdot w_3 = T_{04} \to 1 + 2 \cdot 3 = 7, \\ 20 \to 202 & : \quad 2 \cdot w_1 + 2 \cdot w_3 = T_{05} \to 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 8 \end{cases}$$

Множество квазипорогов 0-й фазы: $T_0 = \{2,6,7,8\}$.

Системы 1-й фазы:

$$\begin{cases} 1 \to 001 & : \quad w_3 = T_{11} \to 3, \\ 9 \to 100 & : \quad w_1 = T_{12} \to 1, \\ 17 \to 122 & : \quad w_1 + 2 \cdot w_2 + 2 \cdot w_3 = T_{13} \to 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 11, \\ 25 \to 221 & : \quad 2 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 + w_3 = T_{14} \to 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 9. \end{cases}$$

Множество квазипорогов 1-й фазы: $T_1 = \{1,3,9,11\}$.

Система 2-й фазы:

$$\begin{cases} 4 \to 011 & : \quad w_2 + w_3 = T_{21} \to 2 + 3 = 5, \\ 15 \to 120 & : \quad w_1 + 2 \cdot w_2 = T_{22} \to 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5, \\ 21 \to 210 & : \quad 2 \cdot w_1 + w_2 = T_{23} \to 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4. \end{cases}$$

Множество квазипорогов 2-й фазы: $T_2 = \{4,5\}$.

Условие $(\forall T_i, T_j)(T_i \mathbf{I}\, T_j = \varnothing)$, где $i \neq j$, $i, j \in \{0,1,\mathbf{K}, k-1\}$ определяет реализуемость заданной функции на k-значном однородном сотовом нейроне.

Сложность нейрона, равная сумме весов синапсов, во многом определяется выбранным орбитальным центром X_C.

Предложим процедуру вычисления оптимального орбитального центра, проиллюстрировав её на следующем примере.

Определить настройку 3-значного сотового нейрона, реализующего функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, равную с учётом оптимального орбитального центра X_C:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0 \text{ на } 2, 3, 7, 11, \\ 1 \text{ на } 1, 19, 24, \\ 2 \text{ на } 0, 25, \end{cases} \tag{8}$$

При произвольном орбитальном центра X_C, модель k-значного сотового нейрона определяется выражением (8):

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot |x_{ci} - x_{ki}| = P_{pa}, \tag{9}$$

где w_i — вес i-го синапса, x_{ci} — значение i-го орбитального центра X_C, x_{ki} — значение i-го разряда входного вектора $X = (x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n)$, определяющего k-ое значение реализуемой функции $f(X) = p$, $p \in \{0,1,2,\mathbf{K}, k-1\}$, P_{pa} — a-й квазипорог нейрона, при котором $f(X) = p$.

Определим удалённость заданных точек X от X_c равного $0,1,\mathbf{K}, k^n - 1$, в рассматриваемом случае k=n=3, следовательно, $X_c = \{0,1,2,\mathbf{K},26\}$. Сведём вычисление удалённости, определяемые радиусом $R(X_c, X_i)$ в табл.1, при этом следующей строкой после строки, в которой указаны радиусы, $R(X_c, X_i)$, является строка, в которой вычислена мощность сигнатуры графа, определяющего противоречивость реализуемой функции на орбите.

Точки пространства, вошедшие в противоречивые пары {010, 201}, {021, 201}, {102, 001}, отличаются друг от друга значением переменной x_1. Соответствующие модели разностей значений векторов по x_1 не равны друг другу, следовательно орбитальный центр X_c = 002 является разрешённым.

Расщепляем переменную x_1:

$f(x_i)=0 \to x_i$: 0002,
0010,
0021,
1102;

$f(x_i)=1 \to x_i$: 0001,
2201,
2220;

$f(x_i)=2 \to x_i$: 0000,
2221,

В результате получаем распределение точек функции по орбитам относительно X_c = 0002 (табл. 2).

Табл. 1. Вычисление удаленности

X_C	$f(X)=0$				$f(X)=1$			$f(X)=2$	
	002	010	021	102	001	201	220	000	221
000	2	1	3	3	1	3	4	0	5
	{010,001}, {021,201}, {102,201}$\in U_{пр}$, $\lvert U_{пр}\rvert = 3$								
001	1	2	2	2	0	2	5	1	4
	{002,000}, {010,201}, {021,201}, {102,201}$\in U_{пр}$, $\lvert U_{пр}\rvert = 4$								
002	0	3	3	1	1	3	6	2	5
	{010,201}, {021,201}, {102,001}$\in U_{пр}$, $\lvert U_{пр}\rvert = 3$								
010	3	0	2	4	2	4	3	1	4
	{002,220}, {021,001}, {102,201}, {102,221}, {201,221}$\in U_{пр}$, $\lvert U_{пр}\rvert = 5$								
……………………………………………………………………….….									
102	1	4	4	0	2	2	5	3	4
	{010,221}, {021,221}$\in U_{пр}$, $\lvert U_{пр}\rvert = 2$								

Продолжение Табл. 1.

X_C	$f(X)=0$				$f(X)=1$			$f(X)=2$	
	002	010	021	102	001	201	220	000	221
221	5	4	2	4	4	2	1	5	0
	$\lvert U_{пр}\rvert > 2$								
222	4	5	3	3	5	3	2	6	1
	$\lvert U_{пр}\rvert > 2$								

Табл. 2. Распределение точек функции по орбитам

$f(X)=0$				$f(X)=1$			$f(X)=2$	
0002	0010	0021	1102	0001	2201	2220	0000	2221
0	3	3	2	1	5	8	2	7

Выбираем орбитальный центр X_c, для которого мощность сигнатуры графа противоречивости минимальна $\lvert U_{пр}\rvert = 2$, таким центром является X_c, X_c = 102.Орбитальный центр X_c = 102 является запрещённым, так как нашлась пара точек {021, 221}, отличающихся друг от друга только переменной x_1, по которой

$\lvert x_1(021) - x_1(102)\rvert = \lvert x_1(221) - x_1(102)\rvert \to \lvert 0-1\rvert = \lvert 2-1\rvert$. Следовательно, при любом расщеплении переменной x_1 точки 021 и 221 останутся на одной и той же орбите, и отношение противоречивости останется:

$$f(0,2,1)=0,\ f(2,2,1)=2.$$

Рассмотрим орбитальный центр X_c = 002, для которого $\lvert U_{пр}\rvert = 3$ (рис. 13).

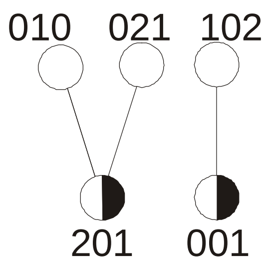


Рис. 13. Орбитальный центр X_C

Получим одно противоречие $\{1102, 0000\} \in U_{пр}$, для его устранения достаточно переменную x_1 расщепить трижды: $x_1 \to x_1', x_1'', x_1'''$.

В результате получаем распределение точек пространства, в которых определена заданная функция $f(x_1, x_2, x_3)$, по орбитам (табл. 3).

Табл. 3. Распределение точек пространства

$f(X)=0$				$f(X)=1$			$f(X)=2$	
00002	00010	00021	11102	00001	22201	22220	00000	22221
0	3	3	3	1	7	10	2	9

Мощность сигнатуры графа противоречивости равна 0. Следовательно, полученная орбитально непротиворечивая функция $f(x_1', x_1'', x_1''', x_2, x_3)$ эквивалентирует заданную функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, которая реализуется на сотовом нейроне с весами синапсов $w_1 = 3$, $w_2 = w_3 = 1$, при этом квазипороги фаз равны номерам орбит, на которых расположены соответствующие точки: $T_{0a} = \{0,3\}$, $T_{1a} = \{1,7,10\}$, $T_{2a} = \{2,9\}$.

Литература

1. Горбатов, В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. — М.: Наука, Физматлит, 1999. – 544 с.
2. Горбатов, А.В. Характеризационная теория синтеза функциональных декомпозиций в k-значных логиках. – М: Наука, Физматлит, 2000. – 336 с.
3. Калитина, О.С. Математическое и программное обеспечение автоматизированного логического проектирования трёхзначных сотовых нейронов. – М.: МГГУ, 2008. – 20 с.