Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление»
www.rypravlenie.ru **том 5(2009), ст.1**

УДК 51.74

О ПОСТРОЕНИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИИ МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Кутергин Владимир Алексеевич, д.т.н, профессор, Институт прикладной механики Уральского отделения Российской Академии Наук

Аннотация

В статье рассматриваются особенности моделей движения механических систем, адекватных задачам инженера, построение и преобразование моделей движения механической системы. Статья состоит из двух частей.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: механическая система, движение механических систем, уравнения движения, построение модели движения, преобразование моделей.

Abstract

Peculiarities of models of mechanical systems motion (adequate to the engineering problem) as well as construction and reformation of the models are viewed in the following article. The article contains two parts.

KEYWORDS: mechanical system, mechanical systems motion, motion equations, construction of motion model, models reformation.

ЧАСТЬ 2.

6. Представление уравнений движения материальной точки в пространствах, определяемых неголономными преобразованиями.

Предположим, что новое пространство Y^3 образуется следующим образом: каждой точке пространства X^3 и значению скорости движения материальной точки в этой точке, для данного момента времени ставиться в соответствие значение скорости. Представим сказанное следующим преобразованием:

$$\begin{aligned} &\dot{y}^s = \dot{y}^s(x^i, \dot{x}^j, t) \\ &s, i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \qquad (47)$$

Предположим, что уравнения (41) нельзя получить путем дифференцирования преобразования (23). Тогда преобразование типа (47) будем называть неголономным, реономным преобразованием по аналогии с неголономными связями.

Продифференцируем (47) один раз по времени, получим:

$$\ddot{y}^s = \frac{\partial \dot{y}^s}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i + \frac{\partial \dot{y}^s}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial \dot{y}^s}{\partial t} \tag{48}$$

Из уравнения (48) следует соотношение:

$$\frac{\partial \dot{y}^s}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial \ddot{y}^s}{\partial \ddot{x}^i} \tag{49}$$

которое не совпадает с соотношением (29), имеющее место при голономных преобразованиях.

Предположим, что данное преобразование не особое и имеет обратное преобразование:

$$\dot{x}^i = \dot{x}^i(y^s, \dot{y}^k, t) \tag{50}$$

Тогда, как известно должно выполняться условие

$$\left|\frac{\partial \dot{y}^s}{\partial \dot{x}^i}\right| \neq 0 \tag{51}$$

позволяющее нам ввести в рассмотрение новую систему координат пространства $\widetilde{Y}^3$ (где «~» знак, который отмечает неголономное пространство от голономного), так что:

$$\left\{\partial x^i / \partial y^s\right\}_\alpha \bar{e}_i = \left\{\tilde{\bar{e}}_s^{\nabla}\right\}_\alpha \tag{52}$$

Теперь можно представить уравнение движения материальной точки в неголономной системе координат $\left\{\tilde{\bar{e}}_s^{\nabla}\right\}_\alpha$. Для этого умножим слева и справа уравнения движения материальной точки на объект $\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{y}^s}$, получим:

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{y}^s} b_{ij}\ddot{x}^j = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{y}^s} F_{Xi} \tag{53}$$

Произведем замену переменных $\ddot{x}^j$ в соответствии с преобразованием (50). Для этого продифференцируем данное преобразование один раз по времени, получим:

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{y}^s} b_{ij}\left(\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial \dot{y}^k}\ddot{y}^k + \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial y^k}\dot{y}^k + \frac{\partial x^j}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{y}^s} F_{Xi} \tag{54}$$

Полученным уравнениям можно придать различные формы известных уравнений движения материальной точки для неголономных систем.

В частности, уравнения движения материальной точки в форме (53) совпадают с уравнениями Аппеля. Действительно, вследствие соотношения (49) мы имеем право записать

$$\frac{\partial \ddot{x}^i}{\partial \ddot{y}^s} b_{ij}\ddot{x}^j = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{y}^s} F_{Xi} \tag{55}$$

Введем энергию ускорений Аппеля

$$A = \frac{1}{2} b_{ij} \ddot{x}^i \ddot{x}^j \tag{56}$$

Учитывая симметрию объекта b_{ij}, определим:

$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{y}^s} = b_{ij} \frac{\partial \ddot{x}^i}{\partial \ddot{y}^s} \ddot{x}^j \tag{57}$$

И следовательно, в силу уравнений Аппеля имеем:

$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{y}^s} = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{y}^s} F_{Xi} \tag{58}$$

Таким образом, уравнения (55) и есть уравнения Аппеля. Представленные в форме (53) они показывают, что уравнения Аппеля – это уравнения Ньютона, представленные в базисе $\left\{\partial x^i / \partial y^s\right\}_\alpha \bar{e}_i = \left\{\tilde{\bar{e}}_s^\nabla\right\}_\alpha$ пространства $\tilde{Y}^3$.

Уравнениям (53, 55) можно придать более привычную форму, например можно построить уравнения движения материальной точки и в сопряженном базисе пространства $\tilde{Y}^3$. Для этого введем в рассмотрение сопряженный базис следующим образом:

$$\left\{\partial \dot{y}^\sigma / \partial \dot{x}^i\right\}_\alpha \bar{e}^i = \tilde{\bar{e}}_\nabla^\sigma, \; \tilde{\bar{e}}_s^\nabla \tilde{\bar{e}}_\nabla^\sigma = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{y}^s} \frac{\partial \dot{y}^\sigma}{\partial \dot{x}^i} = \delta_s^\sigma \tag{59}$$

Где: $i, s, \sigma = 1, 2, 3$; δ_s^σ – дельта Кронекера. Представим уравнения движения материальной точки в контравариантной форме в пространстве X^3.

$$\ddot{x}^i = b^{ij} F_{Xi} \tag{60}$$

и умножим уравнения слева и справа на объект $\dfrac{\partial \dot{y}^s}{\partial \dot{x}^i}$. Получим

$$\frac{\partial \dot{y}^s}{\partial \dot{x}^i} \ddot{x}^i = \frac{\partial \dot{y}^s}{\partial \dot{x}^i} b^{ij} F_j \tag{61}$$

где: $i, j, s = 1, 2, 3$.

Представим F_{Xi} в новом базисе

$$F_{Xj} \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial \dot{y}^s} = \tilde{Q}_s \tag{62}$$

Поскольку $\left|\dfrac{\partial \dot{x}^j}{\partial \dot{y}^s}\right| \neq 0$, и выполняется условие (55), определим обратный закон преобразования для обобщенной силы:

$$F_{Xj} = \frac{\partial \dot{y}^\sigma}{\partial \dot{x}^j} \tilde{Q}_\sigma \tag{63}$$

Подставляя вместо F_{Xj}, его представление силы в сопряженном базисе, получим:

$$\frac{\partial \dot{y}^s}{\partial \dot{x}^i} \ddot{x}^i = \frac{\partial \dot{y}^s}{\partial \dot{x}^i} b^{ij} \frac{\partial \dot{y}^\sigma}{\partial \dot{x}^j} \tilde{Q}_\sigma \tag{64}$$

где $i, j, s, \sigma = 1, 2, 3$.

Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление»
www.rypravlenie.ru **том 5(2009), ст.1**

Произведем замену переменных в уравнении (64) в соответствии с выражением (49), получим:

$$\delta^s_\sigma \ddot{y}^\sigma + \frac{\partial \dot{y}^s}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial y^\sigma}\dot{y}^\sigma + \frac{\partial \dot{y}^s}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial t} = \tilde{g}^{s\sigma}\tilde{Q}_\sigma \tag{65}$$

$$\begin{cases} \tilde{g}^{s\sigma} = b^{ij}\dfrac{\partial \dot{y}^s}{\partial \dot{x}^i}\dfrac{\partial \dot{y}^\sigma}{\partial \dot{x}^j} \\ \tilde{Q}_\sigma = F_{Xj}\dfrac{\partial \dot{x}^j}{\partial \dot{y}^s} \end{cases}$$

Дважды контравариантный геометрический объект $\tilde{g}^{s\sigma}$ может выполнять роль фундаментального метрического объекта объекта для некоторой области пространства $\tilde{Y}^3{}_{\alpha*}$; (*) значок сопряженного пространства, (~) значок неголономного пространства.

Полученные уравнения (65) определяют скалярное представление закона Ньютона, выраженного в контравариантной форме в пространстве, определенном сопряженным базисом $\left\{\tilde{e}^\sigma_\nabla\right\}_\alpha$, заданным в окрестности произвольной точки α , для некоторого момента времени t и области пространства $\tilde{Y}^3{}_{\alpha*}$.

7. Модели пространства системы материальных точек со связями в различных координатных базисах.

Уравнения движения систем, состоящих из элементов и связей между ними, могут быть выведены исходя из разных принципов и методов. Огромный багаж используемых принципов и методов построения моделей и определения законов поведения системы и ее элементов, предстает перед исследователями как некоторая совокупность различных не связанных между собой подходов.

Разнообразные вешние формы представления уравнений движения систем в конечном итоге, может быть с разной эффективностью, приводят к одним и тем же результатам. Т.е. сама система остается неизменной, а форма представления и алгоритмы построения модели – разные. Чем одна форма представления лучше (хуже) другой? Что скрывается за этим разнообразием? Подобные вопросы довольно часто возникают у инженеров, занимающихся построением и изучением систем на модельном уровне. Кроме того, за аналитическими формализмами, используемыми в задачах моделирования, скрывается то, что объединяет или наоборот разделяет системы на группы, не позволяет увидеть в них единство и различие. Но самое главное, в классических подходах построения моделей сама система ее функциональные и морфологические особенности, как бы растворяются. Классические методы не содержат механизма образования целого, из составляющих это процессов исходных элементов и связей, а также объединяющей их структуры. Мы хотя и можем вывести уравнения движения, но в них трудно выделить особенности морфологического (элементы, связи, структура) и функционального (параметры, процессы, качество) описания системы, а также взаимосвязь между ними. Морфологическое описания изначально присутствует у инженера, когда он рисует кинематическую схему механизма, электрическую схему прибора, организационную схему предприятия. Однако затем, на математическом и алгоритмическом уровнях, оно размывается и практически не используется. Переход к другой структуре взаимосвязанных элементов в классических формализмах построения моделей – это по сути построение другой модели системы. Здесь не возможны преобразования, позволяющие изменять структуру системы. Тем самым становятся скрытыми процессы образования и преобразования функций, подфункций систем, которые также трудно выразить рамками классических формализмов.

Наша задача – продемонстрировать новые возможности, которые открывают неклассические тензорные формализмы построения и анализа моделей систем. Показать, что огромное разнообразие форм представления уравнений движения систем, порождается различными свойствами многообразий (формируемых структурой связей) и индуцированных ими координатных базисов, в которых представляются физические процессы преобразования энергии. Применительно к механике несвободной системы точек это означает, что огромное разнообразие используемых форм движения взаимосвязано, преобразуется одно в другое и различается тем, что уравнения движения общей динамической системы точек, точно такое, какое можно приписать точке N -мерного пространства, движение которой должно принадлежать $n=(N-m)$ многообразию, задаваемому структурой m независимых связей. Характеристики движения такой системы определяются совокупностью элементов, связей и образуемой между ними структуры. Они могут быть заданы в ковариантных или контравариантных переменных, в базисах различных пространств и подпространств, индуцированных структурой исследуемого пространства (многообразия). В данном случае мы не рассматриваем движение некоторого множества материальных точек в трехмерном евклидовом пространстве, а находим этому другое представление: движение единственной точки α N -мерного пространства R^N, структура которого формируется так:

$N = 3M$, где M – число материальных точек системы;

движение каждой точки определяется тремя измеряемыми параметрами или тремя степенями свободы.

7.1. Формальные конструкции ограничивающих связей

Несвободное движение изображающей точки. Если движение изображающей точки ничем не стеснено, то она свободно может занимать произвольное положение в R^{3M} . Если движение изображающей точки ограничено, то тогда будем говорить, что на движение изображающей точки наложены связи. Таким образом, связь в данном случае – это некоторое ограничение, которое накладывается на свободное движение изображающей точки. При этом математическое описание связи должно выражать соотношение между измеряемыми координатами или по координате. При введении связей изменяется и само пространство R^n. Из однородного пространства, в котором каждая точка считается достижимой, оно превращается в анизотропное пространство, в котором изображающая точка имеет допустимые и недопустимые направления движения и положения. Мы будем говорить, что пространство, в данном случае, наделено или обладает структурой.

Пусть мы имеем МС (механическую систему), состоящую из M МТ и пусть каждый элемент характеризуется тремя измеряемыми параметрами. Тогда наблюдение за изменением $3M$ параметров можно отождествить с положением или движением изображающей точки α в $N = 3M$ -мерном пространстве. Пусть на движение изображающей точки α наложено m независимых уравнений связи, определяющих некоторое соотношение между n координатами (ограничение на положение изображающей точки) или дифференциалами координат (ограничение, например, на направление движения). Конфигурация системы из M элементов с m независимыми уравнениями связей вполне может быть определена набором $(N-m)=n$ параметров, которые будем называть независимыми координатами. Все другие $(N-n)$ координат могут быть выражены через независимые координаты. После введения независимых координат, закон движения изображающей точки α может быть задан через них. Не существует общего правила выбора независимых координат. Обычно может быть предложено большое количество способов их выбора. Остановиться на одном из них можно, привлекая различные соображения, связанные с наглядностью интерпретации, простотой расчетов, целями, задачами построения и исследования моделей МС.

Будем говорить, что на изображающую точку α наложены связи, если в любой момент времени t в пространстве R^N выделено подмногообразие S^n (гиперповерхность), которое локально задается уравнениями

$$f^{\rho}(x^i, dx^j) = 0 \qquad (1)$$

или

$$f^{\rho}(x^i,\ \dot{x}^j)=0,$$
$$\rho=1,...,(N-m);\quad i=1,...,N;\ \ j=1,...,N;$$

причем функции f^{ρ} k раз дифференцируемы, $k\geq 2$.

Задание такого рода ограничений на движение изображающей точки включает две наиболее распространенных конструкции введения связей. Первая – это когда подмногообразие нелинейно зависит только от координат, а вторая – когда оно линейно зависит от $\dot{x}^i$ или dx^i и нелинейно от x^i. Далее вторую конструкцию мы рассмотрим в более общем виде.

Первая конструкция. Уравнения (1) являются функциями только координат x^i. Такие связи принято называть голономными и склерономными (стационарными). Они задаются системой конечных уравнений

$$\begin{cases} f^1(x^1,...,x^N)=0 \\ \quad ...... \\ f^{N-n}(x^1,...,x^N)=0 \end{cases} \qquad (2)$$

ранг $\left(\dfrac{\partial f^{\rho}}{\partial x^i}\right)=(N-n)$

где $i=1,...,N;\rho=1,...,N-n$; n – размерность гиперповерхности в R^N

При этом в окрестности некоторой точки (p) можно ввести новые локальные координаты $y^j, j=1,...n$, такие, что

$$y^{n+1}_{(p)}=f^1_{(p)}(x^1,...,x^N),...,y^N=f^{N-n}_{(p)}(x^1..,x^N) \qquad (3)$$

и подмногообразие S^n задается в них уравнениями

$$y^{n+1}=0,...,y^N=0 \qquad (4)$$

Функции $y^1,...,y^n$ являются локальными координатами на подмногообразии S^n размерности n. Векторы $\dot{x}^i$ или дифференциалы dx^i при выполнении (2) принадлежат касательному пространству S^m в точке (p). Это можно отразить следующей записью:

$$\dot{x}^i\in T^n_p S^n, dx^i\in T^n_p S^n. \qquad (5)$$

Уравнения, представляющие касательное пространство T^n_p T^n_pв точке (p) к многообразию S^n, имеют следующий вид

$$dy^{\rho}_p=\left(\frac{\partial f^{\rho}}{\partial x^i}\right)_p dx^i=0 \text{ или } \dot{y}^{\rho}_p=\left(\frac{\partial f^{\rho}}{\partial x^i}\right)_p x^i=0 \qquad (6)$$

и определяют возможные дифференциалы или скорости движения изображающей точки $\alpha \in S^n$.

В новых локальных координатах $y^j\,(j=1,...,N)$ положение и скорость движения изображающей точки α можно определить как

$$\begin{aligned}(y^1,..., y^n)_p, y_p^{n+1} = 0,..., y_p^N = 0\\ (\dot{y}^1,..., \dot{y}^n)_p, \dot{y}_p^{n+1} = 0,..., \dot{y}_p^N = 0\end{aligned} \tag{7}$$

Ввиду произвольности преобразований (3) мы можем их выбрать в соответствии с (2) и тогда рассматривать два этапа построения подмногообразия S^n в пространстве R^n.

Первый этап. Построение преобразования координат

$$y^j = y^j(x^1,...,x^N) \tag{8}$$

следующим образом:

$$\begin{cases} y^1 = x^1, y^2 = x^2,..., y^n = x^n \\ y^{n+1} = y^{n+1}(x^1,...,x^N) = f^1(x^1,...,x^N) \\ ... \\ y^N = y^{n+m}(x^1,...,x^N) = f^{N-n}(x^1,...,x^N) \end{cases} \tag{9}$$

Выбор функций $(y^1,...,y^n)$, в общем случае, произволен.

В силу аналитичности преобразований (9) в каждой точке $p \in R^N$ они индуцируют локальное однородное преобразование компонент контравариантных векторов

$$dy^j = (\partial y^j / \partial x^i)_p\, dx^i = c_i^j dx^i \text{ и } dx^i = (\partial x^i / \partial y^j)_p\, dy^j = \gamma_j^i dy^j$$

Следовательно, имеется возможность построения смешанных ГО c_i^j, γ_j^i, и, если заданы компоненты контравариантных, ковариантных и смешанных геометрических объектов в R^N, то можно получить их представление в пространствах $T_p^n S^n, N_p^n S^n$ (используя соответствующие законы преобразования).

Второй этап. Построение обратного преобразования координат

$$\begin{cases} x^1 = y^1, x^2 = y^2,..., x^n = y^n \\ x^{n+1} = x^{n+1}(y^\lambda,...,y^\rho) \\ ... \\ x^N = x^N(y^\lambda,...,y^\rho) \end{cases} \tag{10}$$

где

$\lambda = 1,...,n;$ $\lambda = 1,...,n;$

$\rho = n+1,...,N$ $\rho = n+1,...,N$

которое позволяет, при условии $y^{\rho} = 0$, определить многообразии S^n, заданное в R^N. Далее рассмотрим преобразование компонент контравариантного вектора dx^i_p, при условии $dy^{\rho} = 0$:

$$\begin{cases} dy^{\lambda} = \left(\dfrac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^i}\right)_P dx^i = 0 \\ dy^{\rho} = \left(\dfrac{\partial y^{\rho}}{\partial x^i}\right)_P dx^i = 0 \end{cases} \tag{11}$$

$$dx^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^{\lambda}}\right)_p dy^{\lambda} + \underbrace{\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^{\rho}}\right)_p dy^{\rho}}_{=0} \tag{12}$$

Преобразования (11) при условии $y^{\rho} = dy^{\rho} = 0$ указывают способ задания произвольного вектора dx, целиком лежащего в $T^n_p S^n$ (т.е. его n-мерное представление). Преобразования (12) указывают способ представления вектора $dx \in T^n_p S^n$ с компонентами $dx \in R^N$, т.е. его N -мерное представление.

Таким образом, движение изображающей точки α, подчиненное голономным, склерономным связям (2), должно принадлежать S^n; чтобы реализовать такое движение, необходимо задать точку $p \in S^n$ и рассмотреть такую систему окрестностей многообразия S^n, которая при условии $dx^i \in T^n_p S^n$ гарантировала бы нам $x(t) \in S^n$ (t – параметр траектории).

Введение связей (2) делает пространство R^N неоднородным. Оно разбивается на два подпространства: с одной стороны, это подпространство S^n, а с другой – подпространство S^{N-n}, дополняющее S^n локально до целого. Каждое из подпространств в окрестности произвольной точки $p \in S^n$ может быть параметризовано совокупностью n и $(N-n)$ независимых координат. В частности, согласно (10), независимыми координатами подпространства S^n являются $y^{\lambda}, \lambda = 1,...,n$, а подпространства S^{N-n} – координаты $y^{\rho}, \rho = n+1,...,N$.

Наши построения в общем случай носят локальный характер. т.е. используют свойства S^n в сколь угодно малой окрестности рассматриваемой точки. Поэтому запись уравнения (10) достаточно считать выполненной локально.

Базис $\bar{t}_{pj}$ касательного пространства R^N в криволинейной системе координат y^j, $j = 1,...,n$, в точках $p \in S^n$, где $p = A, B,...$ распадается на два независимых базиса касательных подпространств T_p^n и T_p^{N-n} :

$$\bar{t}_\lambda \in T_p^n \quad \text{и} \quad \bar{t}_\rho \in T_p^{N-n}, \lambda = 1,...,n; \cdot\cdot \rho = n+1,...,N.$$

Совокупность всех касательных подпространств T_p^n во всех рассматриваемых точках $p = A, B,...$ многообразия S^n можно объединить в $2n$ -мерное многообразие $T_p^n S^n$, в котором y^λ – координаты некоторой точки $p \in S^m$, а $(\partial x^i / \partial y^\lambda)\bar{e}_i = \bar{t}_\lambda$ – координаты точек пространства $T_p^n(y^\lambda)$. $\cup\, T_p^n(y^\lambda) S^n$ будем называть касательным расслоением многообразия S^n. Аналогично $\cup\, T_p^{N-n}(y^\lambda) S^{N-n}$ в точках $p \in S^n$ будем называть касательным расслоением многообразия S_p^{N-n} по его краевым точкам $p \in S^n$.

Объединение $T_p^n \cup T_p^{N-n}$ в точках $p \in S^n$ $(p = A, B,...)$ образует касательное расслоение пространства R^N по многообразию S^n.

Подобные же рассуждения можно провести относительно компонент взаимного базиса $\bar{t}^\lambda, \bar{t}^\rho$ $\lambda = 1,...,n; \cdot\cdot \rho = n+1,...,N$ нормальных подпространств N_p^n и N_p^{N-n} и в результате прийти к понятиям:

$\cup\, N_p^n S^n$ – нормальное расслоение многообразия S^{N-n} в точках $p \in S^n$;

$\cup\, N_p^{N-n} S^{N-n}$ – нормальное расслоение многообразия S^m в точках $p \in S^n$;

где $p = A, B,...$

Объединение $N_p^n \cup N_p^{N-n}$ в точках $p \in S^n$ образует нормальное расслоение пространств R^N на многообразии S^n. В силу условия взаимности между базисами $\{\bar{t}_i\}$ и $\{\bar{t}^j\}$, $i, j = 1,...,N$ существуют важные соотношения:

$$\begin{cases} t_{\lambda *} t^\mu = \delta_\lambda^\mu \\ t_{\rho *} t^\varkappa = \delta_\rho^\varkappa \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} t_{\lambda *} t^\varkappa = 0 \\ t_{\rho *} t^\mu = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Где $\lambda, \mu = 1,...,n; \quad \rho, \varkappa = n+1,...,N$.Условия (13) и (14) являются следствием условия взаимности двух базисов $\{\bar{t}_i\}$ и $\{\bar{t}^j\}$

Вторая конструкция. Уравнения (1) являются функциями координат x^i и зависят также от dx^i или $\dot{x}^i$. Вид уравнений (1) здесь может быть произволен, мы наложим на него только условие аналитичности. Связи такого типа называются неголономными. Будем рассматривать достаточно общий случай, когда на движение изображающей точки α наложены связи как голономные, так и неголономные первого порядка, а также неголономные линейные связи второго порядка. Представим это в следующем виде

$$\begin{cases} f^1(x^1,...,x^N) = 0 \\ \quad ... \\ f^{m1}(x^1,...,x^N) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} F^1(x^1,...,x^N, \dot{x}^1,...,\dot{x}^N) = 0 \\ \quad ... \\ F^{m2}(x^1,...,x^N, \dot{x}^1,...,\dot{x}^N) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

где $m1$ – число голономных связей.

$m2$ – число неголономных связей первого порядка.

Введем следующие обозначения:

$m = m1 + m2$ – общее число уравнений связи;

$\rho 1 = 1,...,m1$ – индекс, принимающий значения номеров уравнений (15);

$\rho 2 = 1,...,m2$ – индекс, принимающий значения номеров уравнений (16);

$\rho = 1,...,m1, m1+1,...,m1+m2$ – индекс, пробегающий номера всех уравнений (15), (16).

Дифференцируя уравнения связей (15) дважды, а уравнения (16) – один раз по времени, получим возможность представить все уравнения связей в единой дифференциальной форме:

$$F^\rho(x^i, \dot{x}^j, \ddot{x}^s) = b_s^\rho \ddot{x}^s + b_0^\rho = 0 \tag{17}$$

где $i, j, s = 1,...,n$;

$\rho = 1,...,m$;

$b_s^\rho = b_s^{\rho 1} = \dfrac{\partial f^{\rho 1}}{\partial x^s}; \ \rho, \rho 1 = 1,...,m1$

$$b_s^\rho = b_s^{\rho 2} = \frac{\partial F^{\rho 2}}{\partial \dot{x}^s}; \ \rho 2 = 1,...,m2; \ \rho = m+1,...,m1+m2; \tag{18}$$

$$b_0^{\rho} = b_0^{\rho 1} = \frac{\partial^2 f^{\rho 1}}{\partial x^i \partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^j; \quad \rho 1 = 1,...,m1;$$

$$b_0^{\rho} = b_0^{\rho 2} = \frac{\partial F^{\rho 2}}{\partial x^i} \dot{x}^i; \ \rho 2 = 1,...,m2; \ \rho = m1+1,...,m1+m2;$$

Будем полагать, что уравнения (15) – (16) независимы и совместны, тогда ранг матрицы, составленной из элементов b_s^p, где $\rho = 1,...,m; s = 1,...,N; \ (N > m)$, равен m.

Теперь рассмотрим последовательно произвольное линейное преобразование координат и скоростей изображающей точки $\alpha_p \in R^N$. Сначала рассмотрим преобразование координат:

$$\begin{cases} y^1 = x^1,..., y^n = x^d \\ y^{n+1} = y^1(x^1,...,x^N) = f^1(x^1,...,x^N) \\ y^{n+1} = y^{m1}(x^1,...,x^N) = f^{m1}(x^1,...,x^N) \end{cases} \tag{19}$$

При преобразовании координат (19) уравнения связи, ограничивающие движение изображающей точки имеют вид

$$y^{\rho 1}(x^1,...,x^N) = 0$$

и следовательно $\dot{y}^{\rho 1} = 0$; $\ddot{y}^{\rho 1} = 0$; $\rho 1 = n+1,...,n+m1; \ (N - m1) = n$ – число степеней свободы СМС.

Таким образом, движение изображающей точки должно принадлежать многообразию S^n, а скорости и ускорения должны принадлежать касательному подпространству $T_p^n S^n$ $p \in S^n$.

Теперь наложим на движение изображающей точки ограничения на скорость ее движения. Для этого рассмотрим такие независимые преобразования координат скоростей, которые совпадают по форме связи с уравнениями (16):

$$\begin{cases} \dot{y}^{n+m1+1} = \dot{y}^{m1+1}(x^1,...,x^N,\dot{x}^1,...,\dot{x}^N) = F^1(x^1,...,x^N,\dot{x}^1,...,\dot{x}^N) \\ \quad ... \\ \dot{y}^{n+m1+m2} = \dot{y}^{m1+m2}(x^1,...,x^N,\dot{x}^1,...,\dot{x}^N) = F^1(x^1,...,x^N,\dot{x}^1,...,\dot{x}^N) \end{cases} \tag{20}$$

В этом случае дополнительные неголономные уравнения связи, накладывающие ограничения на скорости движения изображающей точки будут иметь следующий простой вид

$$\dot{y}^{\rho 2}(x^1,...,x^N) = 0$$

и отсюда следует $\ddot{y}^{\rho 2} = 0$.

Следовательно скорости и ускорения движения изображающей точки будут принадлежать подпространству, имеющему меньшую размерность чем подпространство T_p^n. Тем не менее, точка $p \in S^n$ и траектории движения изображающей точки $\alpha(t) \in S^n$.

С учетом введенных обозначений можно представить вектор ускорения изображающей точки в новой системе координат. В силу произвольности преобразования (19), (20) построим его таким образом, что

$$\begin{cases} \ddot{y}^1 = \ddot{x}^1, ..., \ddot{y}^n = \ddot{x}^d \\ \ddot{y}^{n+\rho 1} = \dfrac{\partial y^{\rho 1}}{\partial x^s} \ddot{x}^s + b_0^{\rho 1}(x^i, \dot{x}^j) \\ \ddot{y}^{n+m1+\rho 2} = \dfrac{\partial \dot{y}^{\rho 2}}{\partial \dot{x}^s} \ddot{x}^s + b_0^{\rho 2}(x^i, \dot{x}^j) \end{cases} \tag{21}$$

где $d = N - m$; а ранг (21) равен N.

Для (21) существует обратное преобразование такое, что

$$\begin{cases} \ddot{x}^1 = \ddot{y}^1, ..., \ddot{x}^d = \ddot{y}^n \\ \ddot{x}^{n+\rho 1} = \dfrac{\partial x^{\rho 1}}{\partial y^{\lambda}} \ddot{y}^{\lambda} + a_0^{\rho 1}(y^s, \dot{y}^{\sigma}) \\ \ddot{x}^{n+m1+\rho 2} = \dfrac{\partial \dot{x}^{\rho 2}}{\partial \dot{y}^{\lambda}} \ddot{y}^{\lambda} + \dfrac{\partial \dot{x}^{\rho 2}}{\partial \dot{y}^{\rho}} \ddot{y}^{\rho} + a_0^{\rho 2}(y^s, \dot{y}^{\sigma}) \end{cases} \tag{22}$$

где $\lambda = 1,...,n$; $\rho = k+1,...,N$; $i, j, s, \sigma = 1,...,N$;

$\rho 1 = n+1,...,m1; \rho 2 = n+m1+1,...,m2$

Из уравнений (21), (22) следует

$$\frac{\partial \ddot{x}^i}{\partial \ddot{y}^s} = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{y}^s}; \quad \frac{\partial \ddot{y}^i}{\partial \ddot{x}^s} = \frac{\partial \dot{y}^i}{\partial \dot{x}^s}. \tag{23}$$

Следовательно в окрестности произвольной точки $p \in S^n$ можно построить векторы некоторого исходного базиса $\dfrac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{y}^s} \bar{e}_i = \bar{d}_s$ и сопряженного базиса $\dfrac{\partial \dot{y}^{\sigma}}{\partial \dot{x}^i} \bar{e}^i = \bar{d}^{\sigma}$.

Между данными базисными векторами из условий построения выполняется соотношение $\bar{d}_s \cdot \bar{d}^{\sigma} = \delta_s^{\sigma}$, где δ_s^{σ} – символ Кронекера. В данных базисах можно построить уравнения движения, которые будут представлять собой все те же уравнения второго закона Ньютона, представленного в исходном или сопряженном координатном пространстве наделенном структурой, определяемой системой уравнений связи.

Таким образом, движение изображающей точки α, подчиненное голономным и неголономным склерономным связям (15) – (16), должно быть таким, что $\ddot{x}(t) \in S^{N-(m1+m2)}$ в любой точке $p \in S^n$. Так же как и при рассмотрении голономных связей, введение связей (16) наделяет подпространство T_p^n соответствующей структурой. В этом новом пространстве не все скорости и ускорения движения изображающей точки становятся достижимыми, а только те, которые удовлетворяют условиям (16).

Если говорить о семействе траекторий движения изображающей точки, то оно должно обладать следующими свойствами:

– каждая траектория из этого семейства $\{x_1^i(t)\} \in S^{N-m1}$, где S^{N-m1} – многообразие, определяемое (15);

– в окрестности некоторой точки $p \in x_1^i(t)$ и $p \in S^{N-m1}$ из множества допустимых траекторий, проходящих через данную точку p, выделено подмножество $\{x_2^i(t)\}$, подчиняющиеся условиям (16).

Построения, которые мы провели в этом параграфе для голономных и неголономных склерономных связей, могут быть распространены и на реономную геометрию, в которой связь зависит от времени, т.е. многообразие может перемещаться и деформироваться в R^n с течением времени. Все геометрические объекты реономной геометрии должны быть инвариантными по отношению к более широкой группе преобразования:

$$y^j = y^j(x^i, t) \quad \text{или} \qquad dy^j = dy^j(x^i, \dot{x}^s, t)$$

По сути дела все преобразования и построения, которые можно провести здесь, тождественны рассмотренным в склерономной геометрии, если t рассматривать как дополнительную $(n+1)$ -ю координату. В этом случае все геометрические объекты будут принадлежать $(n+1)$ -мерному пространству или многообразию.

При конструировании моделей ТС реономные связи встречаются крайне редко. Однако они достаточно широко могут использоваться при конструировании моделей целенаправленного движения [1].

7.2. Вводимые обозначения.

Итак, мы будем рассматривать уравнения движения системы материальных точек подчиненных уравнениями связи. Для этого зададим уравнения движения одной материальной точки в трехмерном пространстве в виде закона Ньютона, в котором действие связи заменяется силой реакции связи.

$$(b_{ij}\ddot{x}^j)_1 = (F_i + R_i)_1 \qquad \text{(a)}$$

Где: $(b_{ij})_1 = (\delta_{ij} m)_1$; $i, j = 1, 2, 3$;

$(F_i)_1$ – обобщенная внешняя сила, действующая на материальную точку

$(R_i)_1$ – обобщенная сила реакции связей.

Система уравнений (а) определяет движение точки с индексом (1) в трехмерном пространстве X_1^3 ортогональной системы координат x^i. Уравнения (а) являются инвариантными относительно операций введения и удаления связей.

Чтобы рассматривать вопрос представления уравнений движения системы M материальных точек, введем следующие обозначения:

$$\begin{matrix} X_1^1 & X_1^2 & X_1^3 & X_2^1 & X_2^2 & X_3^3 & \ldots & X_M^1 & X_M^2 & X_M^3 \\ m_1 & m_1 & m_1 & m_2 & m_2 & m_2 & \ldots & m_M & m_M & m_M \\ x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & \ldots & \ldots & \ldots & x^N \end{matrix} \qquad \text{(б)}$$

$$N = 3M;$$

$$b_{kl} = \begin{pmatrix} (\delta_{ij})_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (\delta_{ij})_M \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}$$

$$F_k = \begin{pmatrix} (F_i)_1 \\ \vdots \\ (F_i)_M \end{pmatrix}; \quad R_k = \begin{pmatrix} (R_i)_1 \\ \vdots \\ (R_i)_N \end{pmatrix} \qquad \text{(d)}$$

Где $k, l = 1, \ldots, N$; $i, j = 1, 2, 3$.

Тогда уравнения движения системы материальных точек в пространстве R^N, которое получено прямой суммой подпространств $X_1^1 \oplus X_1^2 \oplus X_1^3 \oplus \ldots \oplus X_M^3 = R^N$ можно представить следующим образом:

$$b_{kl}\ddot{x}^l = F_k + R_k \qquad \text{(e)}$$

где $k, l = 1, \ldots, N$; $N = 3M$ – размерность N -мерного пространства R^N

b_{kl} – геометрический объект второго порядка, представляющий структуру пространства внутренних параметров СМТ

F_k, R_k – геометрические объекты первого порядка, представляющие собой N -мерный вектор силового воздействия на движение СМТ

С учетом принятых обозначений, уравнения (е) описывают движение изображающей точки α в пространстве R^N. Когда обобщенный вектор реакции связи $R_k = 0$, то уравнения (е) описывают свободное движение изображающей точки α в пространстве R^N. В случае, когда $R_k \neq 0$, то это значит, что движение изображающей точки α несвободное. На движение наложены связи (ограничения).

8. Представление уравнений движения СМТ в различных базисах.

Рассмотрим представление уравнений движения СМТ в пространстве касательно расслоения многообразия M^N: $T_p^N(y^s)\ M^N$, где многообразие задано в виде обратного преобразования координат:

$$x^i = x^i(y^1,\dots,y^N)\ ;\ i = 1,\dots,N\ .$$

Тогда совокупность векторов

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^s}\right)_{A,B,\dots} \bar{e}_i = \{\bar{t}_s\}$$

где $i, s, k = 1,\dots,N$;

$\bar{e}_i$ – базис декартовой системы координат, образуют базис N -мерного касательного пространства $T^N(y^s_{A,B,\dots})$, который задается в окрестности точек $A, B,\dots$ касательно к многообразию M^N.

Для того, чтобы представить уравнения в пространстве T^N и в новой криволинейной системе координат, необходимо:

1. Представить объекты, входящие в уравнения, в базисе $\{\bar{t}_s\}$

2. Произвести замену переменных, т.е. представить их в новой системе координат y^s, $s = 1,\dots,N$.

Первый этап: умножим уравнения (е) слева и справа на $\dfrac{\partial x^i}{\partial y^s}$:

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^s} b_{il} \ddot{x}^l = \frac{\partial x^i}{\partial y^s} F_i\ ;$$

где $i, l, s = 1,\dots,N$; $R_k = 0$;

Второй этап: произведем замену переменных

$$\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^s}\dot{y}^s\ ;\ \ddot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^s}\ddot{y}^s + \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^s \partial y^\sigma}\dot{y}^s \dot{y}^\sigma$$

Подставим вместо $\ddot{x}^k$ его выражение в правой части, получим

$$b_{il}\frac{\partial x^i}{\partial y^s}\frac{\partial x^l}{\partial y^\sigma}\ddot{y}^\sigma + b_{il}\frac{\partial x^i}{\partial y^s}\frac{\partial^2 x^l}{\partial y^\sigma \partial y^\rho}\dot{y}^\sigma \dot{y}^r = \frac{\partial x^i}{\partial y^s}F_i;$$

Или

$$c_{s\sigma}\ddot{y}^\sigma + C_{s,\sigma r}\dot{y}^\sigma \dot{y}^r = Q_s \qquad \text{(ж)}$$

Где

$$b_{il}\frac{\partial x^i}{\partial y^s}\frac{\partial x^l}{\partial y^\sigma} = c_{s\sigma};\ b_{il}\frac{\partial x^i}{\partial y^s}\frac{\partial^2 x^l}{\partial y^\sigma \partial y^\rho} = C_{s,\sigma r};\ \frac{\partial x^i}{\partial y^s}F_i = Q_s$$

Уравнения (ж) представляют собой ковариантную форму закона Ньютона, представленного в криволинейной системе координат y^s, в касательном пространстве $T_p^N(y^s_\cdot)$. Уравнения (ж) примут обычную форму закона Ньютона, если воспользоваться операцией абсолютного дифференцирования, тогда

$$c_{sp}\frac{D\dot{y}^p}{\partial t} = Q_s$$

Здесь:

$$\frac{D\dot{y}^p}{\partial t} = \ddot{y}^p + C^p_{\sigma r}\dot{y}^\sigma \dot{y}^r;\ \ c_{sp}C^p_{\sigma r} = C_{s,\sigma r};$$

Уравнения (е) имеют более привычную форму второго закона Ньютона, здесь $c_{\sigma s}$ – с одной стороны матрица коэффициентов квадратичной формы, определяющую кинетическую энергию СМТ

$$T = \frac{1}{2}b_{kl}\dot{x}^k \dot{x}^l = \frac{1}{2}b_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial y^s}\frac{\partial x^l}{\partial y^\sigma}\dot{y}^\sigma \dot{y}^r = \frac{1}{2}c_{s\sigma}\dot{y}^\sigma \dot{y}^r$$

С другой стороны, $c_{\sigma s}$ – это метрический тензор, при помощи которого можно определять расстояния между точками в касательном пространстве $T_p^N(y^s_\cdot)$ многообразия M^N.

Рассмотрим представление уравнений движения в пространстве нормального расслоения $N_p^N(y^s_\cdot)$ многообразия M^N, определяемом совокупностью векторов:

$$\left(\frac{\partial y^s}{\partial x^k}\right)\bar{e}^k = \{\bar{t}^s_p\}$$

Где: $k, s, \sigma = 1,...,N$; $(\bar{t}_\sigma \bar{t}^s)_p = \delta^s_\sigma$

$\bar{e}^k$ – контравариантный базис декартовой системы координат, как известно $\bar{e}^k = \bar{e}_k$.

Для этого представим второй закон Ньютона в виде разрешенном относительно старшей производной:

$$\ddot{x}^l = b^{lq} F_q \tag{з}$$

где $b_{kl} b^{lq} = \delta_k^q$; $l, k, q = 1, ..., N$.

Затем, умножим левую и правую часть равенства (з) на $\dfrac{\partial y^s}{\partial x^l}$, получим:

$$\frac{\partial y^s}{\partial x^l} \ddot{x}^l = \frac{\partial y^s}{\partial x^l} b^{lq} F_q \tag{и}$$

Тем самым мы представили геометрические объекты в левой и правой части равенства (и) в проекции на оси сопряженного базиса $\{\bar{t}_p^s\}$. Чтобы представить эти объекты в пространстве нормального расслоения $N_p^N(y^s_{.})$ многообразия M^N , достаточно сделать замену переменной x^i на y^s , и представить объект F_q в том же сопряженном базисе. В результате получим:

$$\frac{\partial y^s}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial y^\sigma} \ddot{y}^\sigma + \frac{\partial y^s}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^\sigma \partial y^\rho} \dot{y}^\sigma \dot{y}^r = \frac{\partial y^s}{\partial x^l} b^{lq} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^q} Q_\sigma ;$$

Или

$$\delta_\sigma^s \ddot{y}^\sigma + C_{\sigma r}^s \dot{y}^\sigma \dot{y}^r = c^{s\sigma} Q_\sigma \tag{к}$$

где

$$\delta_\sigma^s \ddot{y}^\sigma = \ddot{y}^\sigma ;$$

$$c^{s\sigma} = b^{lq} \frac{\partial y^s}{\partial x^l} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^q} ;$$

$$C_{\sigma r}^s = \frac{\partial y^s}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^\sigma \partial y^\rho} ;$$

$$F_q = \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^q} Q_\sigma$$

$$s, \sigma, r, q = 1, ..., N$$

Уравнения (к) представляют собой второй закон Ньютона, заданный в пространстве нормального расслоения $N_p^N(y^s_{.})$ многообразия M^N

Пространство $N_p^N(y^s)$ имеет взаимный к касательному пространству $T_p^N(y^s)$ метрический тензор $c^{\sigma s}$. Можно показать, что

$$c_{s\sigma} c^{\sigma q} = \delta_s^q .$$

Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление»
www.rypravlenie.ru **том 5(2009), ст.1**

Используя операцию абсолютного дифференцирования к **уравнениям (к), можно придать форму, совпадающую с законом Ньютона, разрешенным относительно старшей производной:**

$$\frac{D\dot{y}^s}{\partial t} = c^{s\sigma} Q_\sigma$$

Теперь рассмотрим уравнение движения СМТ с учетом связей. Система m независимых уравнений стационарных связей образует в пространстве, определяемом системой криволинейных координат y^s, подмногообразие S^n, $N > n$.

Подмногообразие S^n определяется в многообразии $M^N(y^s)$ координатными поверхностями

$y^\varkappa = 0$ где $\varkappa = n+1,...,N;\ N - m = n;\ m$ – число независимых уравнений связи

$$\begin{cases} y^{n+1} = f^1(x^1,...,x^N) = 0 \\ ... \\ y^N = f^N(x^1,...,x^N) = 0 \end{cases}$$

Уравнения движения СМТ в пространстве касательного расслоения в этом случае разделяются на два подпространства $T_p^n(y^n)S^n$ и $T_p^{N-n}(y^n)S^n$, с общей границей в точках $p \in S^n$.

По аналогии с выводом уравнений движения СМТ в пространстве $T_p^N(y^n)$ для многообразия M^N имеем:

$$\frac{\partial x^k}{\partial y^\lambda} b_{kl} \ddot{x}^l = \frac{\partial x^k}{\partial y^\lambda}(F_k + R_k) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial x^k}{\partial y^\varkappa} b_{kl} \ddot{x}^l = \frac{\partial x^k}{\partial y^\varkappa}(F_k + R_k) \qquad (2)$$

Здесь: $\lambda = 1,...,n;\ \varkappa = n+1,...,N;\ l,k = 1,...,N$.

Система уравнений (1) определяет представление ГО, входящих в уравнения движения СМТ в пространстве R^N в проекциях на два координатных базиса пространства касательного расслоения $\{\bar{t}_\lambda, \bar{t}_\varkappa\}_p$ в точках $p \in S^n$.

Произведем замену переменных и представим их в новом координатном базисе y^s, а также учтем, что в новом координатном пространстве система уравнений связи имеет вид:

$$y^\varkappa = 0,$$

откуда следует, что

$$\dot{y}^{\varkappa} = \ddot{y}^{\varkappa} = 0$$

Кроме того, следует учесть, что сила реакции введенных связей в системе координат x^k, $k = 1,...,N$, будет иметь вид:

$$R_k = \frac{\partial f^h}{\partial x^k}\Lambda_h = \frac{\partial y^h}{\partial x^k}\Lambda_h$$

Где: $f^h(x^1,...,x^N) = 0,\ h = n+1,...,N$ – система независимых уравнений связи;

Λ_h – множитель Лагранжа;

В результате достаточно простых преобразований получим:

$$\begin{cases} T_p^n(y^n): \quad c_{\lambda\mu}\ddot{y}^{\mu} + C_{\lambda,\mu\nu}\dot{y}^{\mu}\dot{y}^{\nu} = Q_{\lambda} \\ T_p^{N-n}(y^n): \quad c_{\varkappa\mu}\ddot{y}^{\mu} + C_{\varkappa,\mu\nu}\dot{y}^{\mu}\dot{y}^{\nu} = Q_{\lambda} + \Lambda_{\varkappa} \end{cases}$$

Здесь: $c_{\lambda\mu} = b_{kl}\dfrac{\partial x^k}{\partial y^{\lambda}}\dfrac{\partial x^l}{\partial y^{\mu}}$;

$$C_{\lambda,\mu\nu} = b_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial y^{\lambda}}\frac{\partial^2 x^l}{\partial y^{\mu}\partial y^{\nu}}$$

$$c_{\varkappa\mu} = b_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial y^{\varkappa}}\frac{\partial x^l}{\partial y^{\mu}}$$

$$C_{\varkappa,\mu\nu} = b_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial y^{\varkappa}}\frac{\partial^2 x^l}{\partial y^{\mu}\partial y^{\nu}}$$

$$Q_{\lambda} = \frac{\partial x^k}{\partial y^{\lambda}}F_k;\ Q_{\varkappa} = \frac{\partial x^k}{\partial y^{\varkappa}}F_k;\ \Lambda_{\varkappa} = \frac{\partial x^k}{\partial y^{\varkappa}}R_k$$

В уравнениях использованы следующие топологические свойства:

$\dfrac{\partial x^k}{\partial y^{\lambda}}\dfrac{\partial y^h}{\partial x^k}\Lambda_h = 0$ в силу условия ортогональности $\dfrac{\partial x^k}{\partial y^{\lambda}}\dfrac{\partial y^{\varkappa}}{\partial x^k} = 0$

$$\frac{\partial x^k}{\partial y^{\varkappa}}\frac{\partial y^h}{\partial x^k}\Lambda_h = \delta_{\varkappa}^h\Lambda_h = \Lambda_{\varkappa}$$

Уравнения (1) представляют собой уравнения Лагранжа II рода или уравнения Ньютона в проекциях на подпространство $T_p^n(y^{\lambda})S^n$.

Уравнения (2) представляют собой уравнения второго закона Ньютона в проекциях на подпространство $T_p^{N-n}(y^{\lambda}),\ \lambda = 1,...,n$.

Уравнения движения СМТ со связями можно представить и в контравариантной форме. Для этого необходимо преобразовать объекты, входящие в уравнение движения:

$$\ddot{x}^k = b^{kl}(F_k + R_k)$$

Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление»
www.rypravlenie.ru **том 5(2009), ст.1**

в пространство $N_p^N(y^s)\, M^N$, нормального расслоения многообразия M^N

Затем ввести в полученные уравнения – связи:

$$y^{\varkappa} = \dot{y}^{\varkappa} = \ddot{y}^{\varkappa}$$

В этом случае уравнения движения СМТ распадаются и могут быть представлены в подпространстве $N_p^N(y^s)$ и подпространстве $N_p^{N-n}(y^s)$ в точках $p \in S^n$.

В результате преобразований получим:

$$\begin{cases} N_p^n(y^n): & \ddot{y}^{\lambda} + C_{\mu\nu}^{\lambda}\dot{y}^{\mu}\dot{y}^{\nu} = Q^{\lambda} + c^{\lambda h}\Lambda_h \\ N_p^{N-n}(y^n): & C_{\mu\nu}^{\varkappa}\dot{y}^{\mu}\dot{y}^{\nu} = Q^{\varkappa} + c^{\varkappa h}\Lambda_h \end{cases}$$

Здесь:

$$C_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^{\mu}\partial y^{\nu}}; \qquad \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^k} b^{kl} F_l = Q^{\lambda};$$

$$c^{\lambda h} = b^{kl}\,\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial x^k}\frac{\partial y^h}{\partial x^l}$$

$$C_{\mu\nu}^{\varkappa} = \frac{\partial y^{\varkappa}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^{\mu}\partial y^{\nu}}; \qquad \frac{\partial y^{\varkappa}}{\partial x^k} b^{kl} F_l = Q^{\varkappa};$$

$$c^{\varkappa h} = b^{kl}\,\frac{\partial y^{\varkappa}}{\partial x^k}\frac{\partial y^h}{\partial x^l}$$

$\Lambda^{\varkappa} = c^{\varkappa h}\Lambda_h$ – вектор реакции связи R_k, заданный в подпространстве $N_p^{N-n}(y^s)$ в базисе, $\{\bar{t}^{\varkappa}\}_p$ $p \in S^n$; $\lambda,\mu,\nu = 1,\ldots,n;$ $k,l = 1,\ldots,N; \varkappa, h = n+1,\ldots,N$;

Ковариантные уравнения Ньютона для СМТ со связями в ортогональном базисе $\{\bar{t}_{\lambda}, \bar{t}^{\varkappa}\}$ могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{cases} c_{\lambda\mu}\dot{y}^{\mu} + C_{\lambda,\mu\nu}\dot{y}^{\mu}\dot{y}^{\nu} = Q_{\lambda} \\ C_{\mu\nu}^{\varkappa}\dot{y}^{\mu}\dot{y}^{\nu} = Q^{\varkappa} + c^{\varkappa h}\Lambda_h \end{cases}$$

Контравариантные уравнения Ньютона для СМТ со связями в базисе $\{\bar{t}_{\lambda}, \bar{t}^{\varkappa}\}$ примут вид:

$$\begin{cases} \ddot{y}^{\lambda} + C_{\mu\nu}^{\lambda}\dot{y}^{\mu}\dot{y}^{\nu} = c^{\lambda\mu}Q_{\mu} \\ C_{\varkappa,\mu\nu}\dot{y}^{\mu}\dot{y}^{\nu} = Q_{\varkappa} + \Lambda_{\varkappa} \end{cases}$$

Где: $c^{\lambda\mu}c_{\mu\nu} = \delta_{\nu}^{\lambda}$, т.е. $c^{\lambda\mu} = (c_{\lambda\mu})^{-1}$;

$c^{\varkappa h}c_{hp} = \delta_p^h$; т.е. $c^{\varkappa h} = (c_{\varkappa h})^{-1}$

$Q_{\varkappa} = c_{\varkappa h} Q^h$

Ковариантные уравнения Ньютона для СМТ со связями в ортогональном базисе $\{\bar{t}^{\lambda}, \bar{t}_{\varkappa}\}$ будут иметь вид:

$$\begin{cases} \ddot{y}^{\lambda} + C^{\lambda}_{\mu\nu} \dot{y}^{\mu} \dot{y}^{\nu} = Q^{\lambda} + c^{\lambda h} \Lambda_h \\ C_{\varkappa,\mu\nu} \dot{y}^{\mu} \dot{y}^{\nu} = Q_{\varkappa} + \Lambda_{\varkappa} \end{cases}$$

Выразив вектор реакции связи $\Lambda_{\varkappa}$ из второй системы уравнений и подставив его в первую систему уравнений, можно получить уравнение Ньютона в пространстве $N^n_p(y^{\lambda})$, которые исключают реакции связи.

9. Классические принципы механики с геометрической точки зрения.

9.1. Принцип освобождаемости от связей.

Пусть $x^i(t)$ – траектория движения системы со связями. Систему можно освободить от связей и доставить некую силу – реакцию связей $R_i(t)$ таким образом, что кривая $x^i(t)$ будет удовлетворять ограничениям, но остается траекторией освобожденной системы. При этом предполагается, что реакция связей является, по меньшей мере, измеримой функцией. Для траектории будут справедливы следующие уравнения движения:

$$m_{ij} \ddot{x}^j = F_i(x^k, \dot{x}^s, t) + R_i(t), \quad i, j, k = 1, ..., N \tag{1}$$

Уравнения представляют собой более полную запись уравнений Ньютона. С другой стороны это инвариантное равенство между геометрическими объектами – силой инерции слева и суммарным результатом воздействия на систему внешних и внутренних сил. Данный вид уравнений может представляться в различных системах координат, отличающихся от исходной системы координат определенными типами преобразований.

9.2. Идеальность связей.

Пусть задана система уравнений связи

$$\begin{gathered} f^{\rho}(x^i, t) = 0 \\ i = 1, ..., N; \quad \rho = 1, ..., m \end{gathered} \tag{а}$$

Продифференцируем (а) один раз по времени

$$\frac{\partial f^{\rho}}{\partial x^i}(x^i, t) \dot{x}^i + \frac{\partial f^{\rho}}{\partial t}(x^i, t) = 0 \tag{б}$$

Введем обозначения:

$$\frac{\partial f^{\rho}}{\partial x^{i}}(x^{i},t)=A_{i}^{\rho}(x^{i},t); \qquad \frac{\partial f^{\rho}}{\partial t}(x^{i},t)=b^{\rho}(x^{i},t)$$

Тогда уравнение связи можно представить в виде:

$$A_{i}^{\rho}(x^{i},t)+b^{\rho}(x^{i},t)=0;$$
$$\rho=1,...,m; \quad i=1,...,N$$

С геометрической точки зрения соотношения представляют собой m – уравнений гиперплоскостей пересекающихся в N -мерном пространстве в произвольной точке x_{α}^{i} и образующих $(N-m)$ -мерную гиперплоскость, которой должен принадлежать участок траектории $x^{i}(t)$ системы.

Связи являются идеальными, т.е. для любого возможного перемещения δx^{i} в любой точке $p\in x^{i}(t)$ будут справедливы следующие соотношения:

$$R_{i}\delta x^{i}=0, \quad i=1,...,N$$

или как принято говорить, элементарная работа сил реакции связей на возможных перемещениях равна нулю. Условие идеальности связей эквивалентны тому, что найдется такая функция $\Lambda_{\rho}(t)$, что

$$R_{i}=A_{i}^{\rho}(x^{s},t)\Lambda_{\rho}, \quad s,\rho=1,...,m. \tag{2}$$

Условие идеальности связей будет иметь вид:

$$A_{i}^{\rho}(x^{s},t)\Lambda_{\rho}\delta x^{i}=0 \tag{3}$$

9.3. Принцип Даламбера – Лагранжа

Если определить реакцию связи, из уравнений (1), то можно сформулировать условие идеальности связей другим образом:

$$\left(m_{ij}\ddot{x}^{j}-F_{i}(x^{i},\dot{x}^{j},t)\right)\delta x^{i}=0 \tag{4}$$

Таким образом, основной принцип механики Даламбера - Лагранжа – это другая формулировка условия идеальности связей для траектории движения системы $x^{i}(t)$ при условии выполнения связей.

9.4. Уравнения Лагранжа первого рода.

Принцип Даламбера - Лагранжа эквивалентен уравнениям Лагранжа первого рода. Последние выражают тот факт, что траектория движения системы $x^i(t)$ будет удовлетворять связям тогда и только тогда, когда найдется такая функция $\Lambda_\rho(t)$, что

$$m_{ij}\ddot{x}^j - F_i(x^i, \dot{x}^j, t) = \Lambda_\rho A_i^\rho(x^s, t), \quad i, j, s = 1,...N \tag{5}$$

Где: $A_i^\rho = \dfrac{\partial f^\rho}{\partial x^i}$

9.5. Геометрическая формулировка условия идеальности связей

Рассмотрим условие идеальности связей в форме (3) с геометрической точки зрения. Для этого при помощи уравнений связи. Введем представление координатных скоростей $\dot{x}^i$ в новой криволинейной системе координат y^p, $p = 1,...,N$:

$$y^p = y^p(x^i, t); \quad y^\rho = f^\rho(x^i, t); \quad \dot{y}^p = \frac{\partial y^p}{\partial x^i}(x^i, t)\dot{x}^i + \frac{\partial y^p}{\partial t}(x^i, t)$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} \dot{y}^\lambda = \delta_i^\lambda \dot{x}^i \\ \dot{y}^\rho = A_i^\rho \dot{x}^i + b^\rho \end{cases}$$

Где: $\lambda, \mu = 1,...,N; \ \rho = n+1,...,N; \quad n = N - m;$

$i = 1,...,N;$ δ_i^λ – символ Кронекера

и имеет место обратное преобразование

$$\begin{cases} \dot{x}^i = \delta_\lambda^i \dot{y}^\lambda \\ \dot{x}^i = B_\lambda^i \dot{y}^\lambda + B_\rho^i \dot{y}^\rho \end{cases}$$

где $\dot{y}^\rho = (\dot{y}^\rho - \dot{y}_a^\rho)$

В этой новой системе координат уравнения связи будут иметь вид $\dot{y}^\rho = 0$ $\rho = n+1,...,N; \quad n = N - m$. Поскольку условие идеальности связей мы рассматриваем локально, то можно перейти от произвольных движений δx^i к произвольным скоростям $\dfrac{\delta x^i}{dt} = \delta \dot{x}^i$.

Тогда условие идеальности будет иметь вид

$$R_i \delta \dot{x}^i = 0$$

и будет отражать свойство равенства нулю мощности сил реакции при произвольных скоростях движения системы.

Подставляя в это условие определение R_i и $\delta \dot{x}^i$ в новой системе координат, и учитывая введение связи $\dot{y}^\rho$, получим:

$$\left(A_i^{\rho}(x^s,t)\Lambda_{\rho}\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^{\lambda}}\dot{y}^{\lambda}+\underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial y^{\rho}}\dot{y}^{\rho}}_{=0}\right)=0$$

Или

$$\left(A_i^{\rho}(x^s,t)\Lambda_{\rho}\frac{\partial x^i}{\partial y^{\lambda}}\right)\dot{y}^{\lambda}=0 \tag{6}$$

Учитывая произвольность координат скоростей, условие идеальности связей примет вид:

$$A_i^{\rho}(x^s,t)\frac{\partial x^i}{\partial y^{\lambda}}\Lambda_{\rho}=0 \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial y^{\rho}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^{\lambda}}\Lambda_{\rho}=0 \tag{7}$$

С геометрической точки зрения уравнение отражает свойство ортогональности двух базисов, которым принадлежат объекты:

$$\dot{y}^{\lambda}\in\bar{t}_{\lambda}^{\nabla};\ \ R_i\in\bar{t}_{\nabla}^{\rho};$$

$$\bar{t}_{\lambda}^{\nabla}=\frac{\partial x^i}{\partial y^{\lambda}}\bar{e}_i;\ \bar{t}_{\nabla}^{\rho}=\frac{\partial y^{\rho}}{\partial x^i}\bar{e}^i$$

Где:

$\bar{t}_{\lambda}^{\nabla}$ – базис касательного подпространства T^n, $\lambda=1,...,n$;

$\bar{t}_{\nabla}^{\rho}$ – базис подпространства N^{N-m}, $\rho=n+1,...,N;$ нормального к касательному подпространству $T_p^n(y^n);\ p\in S_n$;

$\bar{e}_i,\bar{e}^i$ – базисы исходного пространства соответственно прямой и взаимный, которые совпадают, если исходный базис является ортогональным.

Можно сказать иначе, условие идеальности связей с геометрической точки зрения отражает равенство нулю скалярного произведения двух векторов $\left(\dot{x}^i R_i\right)$ на действительных траекториях движения системы, поскольку каждый из векторов принадлежат разным подпространствам ортогональным друг другу. В силу того, что данные вектора имеют разные законы преобразования, поэтому один из них $\dot{x}^i$ – контравариантный вектор, другой R_i – ковариантный вектор.

9.6. Принцип Даламбера – Лагранжа с геометрической точки зрения

Представим скалярное произведение (4), с учетом преобразования (6), тогда

$$\left(m_{ij}\ddot{x}^j-F_i(x^i,\dot{x}^j,t)\frac{\partial x^i}{\partial y^{\lambda}}\right)\dot{y}^{\lambda}=0 \tag{8}$$

Поскольку $\dot{y}^{\lambda}$ – обобщенные координаты, которые определяют траекторию системы, и $\dot{y}^{\lambda} \neq 0$ то отсюда важное следствие

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^{\lambda}}\left(m_{ij}\ddot{x}^j - F_i(x^i, \dot{x}^j, t)\right) = 0 \tag{9}$$

или

$$\begin{gathered} \frac{\partial x^i}{\partial y^{\lambda}} m_{ij}\ddot{x}^j = \frac{\partial x^i}{\partial y^{\lambda}} F_i(x^i, \dot{x}^j, t) \\ \lambda = 1,...,n; \quad i, j = 1,..., N \end{gathered} \tag{10}$$

Уравнения (10) выражают принцип Даламбера – Лагранжа, который отражает равенство проекций ковариантных векторов: силы инерции и обобщенной силы в произвольной точке касательного пространства. В свою очередь, произвольная точка p принадлежит подпространству касательного пространства, определяемого базисом $\{\bar{t}_{\lambda}\}, \lambda = 1,...,n$.

9.7. Уравнения Лагранжа первого рода с геометрической точки зрения

Уравнения

$$\begin{gathered} m_{ij}\ddot{x}^j = F_i(x^i, \dot{x}^j, t) + \Lambda_{\rho} A_i^{\rho}(x^s, t), \\ i, j, s = 1,...N; \rho = n+1, N \end{gathered} \tag{11}$$

выражают равенство ковариантных геометрических объектов, стоящих в левой и правых частях уравнения (11).

Уравнения отражают инвариантное свойство: такой геометрический объект как сила инерции системы, равна сумме внешних и внутренних сил (реакции связи). Поскольку уравнение (11) задано в исходной системе координат, определяемой базисом $\{\bar{e}_i\}$, то все компоненты составляющих геометрических объектов отличны от нуля. Однако, если представить данное равенство в другой системе координат, определяемой базисом $\bar{t}_{\lambda} = \frac{\partial x^i}{\partial y^{\lambda}}\bar{e}_i$, то уравнение (11) примет вид равенства (10).

Действительно, умножаем (11) слева и справа на объект $\frac{\partial x^i}{\partial y^{\lambda}}$, получим,

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^{\lambda}} m_{ij}\ddot{x}^j = \frac{\partial x^i}{\partial y^{\lambda}} F_i(x^i, \dot{x}^j, t) + \underbrace{\Lambda_{\rho} A_i^{\rho}(x^s, t)\frac{\partial x^i}{\partial y^{\lambda}}}_{=0}, \tag{12}$$

В силу условия идеальности связей, последний справа член равенства обращается в ноль и уравнение Лагранжа первого рода превращается в принцип Даламбера – Лагранжа. Если произвести замену переменных в уравнениях (12), т.е. вместо переменной ускорения

$\ddot{x}^j$ подставить его выражение через новые переменные, то мы придем к явному виду уравнений Лагранжа второго рода. Нетрудно видеть, что все приведенные здесь уравнения – это уравнения Ньютона заданные в базисе $\bar{t}_\lambda$.

9.8. Принцип освобождаемости от связей в интегральной форме

Пусть $x(t)$ – траектория системы, удовлетворяющая уравнениям связи. Освободим систему от связей таким образом, что траектория $x(t)$ при этом не изменится. Тогда в уравнения движения необходимо добавить некоторую силу R_i , $i = 1,...,N$, такую, что решение уравнений движения – $x(t)$ удовлетворяли системе уравнений связи.

Для траектории $x(t)$ в любой момент времени справедливы следующие уравнения:

$$m_{ij}\dot{x}^j = \dot{x}_i(t_0) + \int (F_i(x^i, \dot{x}^j, t) + R_i(t))dt$$

Или в форме уравнения импульсов (12)

$$m_{ij}d\dot{x}^j = F_i(x^i, \dot{x}^j, t)dt + d\rho_i(t)$$

где $\rho_i(t)$ – абсолютно непрерывные функции такие, что $\dfrac{d\rho_i(t)}{dt} = R_i(t)$.

В новой системе координат уравнения импульсов будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^s} m_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial y^\sigma} d\dot{y}^\sigma = \frac{\partial x^i}{\partial y^s} F_i(x^i, \dot{x}^j, t)dt + \frac{\partial x^i}{\partial y^s} d\rho_i(t) \tag{13}$$

А при условии выполнения связей $y^\rho = 0$ уравнения (13) распадаются на две подсистемы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x^i}{\partial y^\lambda} m_{ij} \dfrac{\partial x^j}{\partial y^\mu} d\dot{y}^\mu = \dfrac{\partial x^i}{\partial y^\lambda} F_i(x^i, \dot{x}^j, t)dt \\ \dfrac{\partial x^i}{\partial y^\rho} m_{ij} \dfrac{\partial x^j}{\partial y^\lambda} d\dot{y}^\lambda = \dfrac{\partial x^i}{\partial y^\rho} F_i(x^i, \dot{x}^j, t)dt + \dfrac{\partial x^i}{\partial y^\rho} d\rho_i(t) \end{cases}$$

где: $\dfrac{\partial x^i}{\partial y^\lambda} d\rho_i(t) = 0$ – условие идеальности связей в интегральной форме;

$\lambda, \mu = 1,..,n;\ i, j = 1,...,N;\ \rho = n+1,...,N$.

10. Заключение.

Построение моделей – это всегда неформальная процедура, требующая определенных умений, изобретательности, а также глубины понимания тех существенных свойств и процессов, которые проявляются в системе. На разных этапах проектирования требуется разная глубина описания моделей компонентов и связей систем, и каждый последующий этап может потребовать учета все более тонких свойств и взаимодействий. Это приводит к необходимости достаточно гибкой замены исходных гипотез и уже принятых форм представления моделей компонентов и связей систем. Суть изменений, вносимых в модели, обычно связана с добавлением или наоборот уменьшением числа независимых параметров; включением дополнительных свойств, которые на предварительных этапах считались несущественными; установлением дополнительных взаимосвязей между параметрами состояния. Подобные изменения при традиционном способе формализации приводят к существенным преобразованиям моделей поведения МС в целом. Кроме того, разработка новой модели или теории МС, как правило, требует создания новой технологии информационного, алгоритмического и программного обеспечения, что связано с огромными затратами. В связи со сказанным возникла потребность найти унифицированную точку зрения на процессы построения, преобразования, анализа как моделей МС, так и процессов их построения и преобразования.

Анализируя различные подходы системологии, теории систем и системотехники мы обратили внимание на тензорную методологию и теорию моделирования сложных систем. Применительно к МС рассматривались две стороны данного направления. Первая – это тензорные методы динамики механических систем, начало которых было положено Синджем, с другой – тензорный анализ сетей, претендующий на общую теорию систем, разработанный Кроном. Это направление теории систем возникло на базе теоретико-групповых формализмов, которые объединили теоретико-множественную и алгебраическую топологии в задачах тензорного анализа сетей. Основателем данного направления в теории сложных систем является Г. Крон, который впервые показал уникальные возможности тензорных формализмов для задач построения и анализа моделей электрических сетей, разработав общую теорию вращающихся электрических машин, методы диакоптики, эквивалентные электрические модели ко многим физическим явлениям [2,3].

В теоретическом аспекте обе эти стороны развивались изолированно, поскольку, как отмечал Синдж, он не смог понять точку зрения Крона, а Крон считал возможным построение эквивалентных моделей для пространственного движения тел и разнообразных кинематических связей, что пока не удалось сделать никому [4].

Геометрическая точка зрения на процесс построения и преобразования моделей ДС дает возможность говорить о том, что каждой конкретной МС или классу МС соответствует своя геометрия. Каждая такая геометрия определяется своей группой преобразований, оставляющей инвариантными те или иные свойства ГО. Моделям функционирования МС придается форма, не зависящая ни от количества взаимосвязанных элементов, ни от структуры внутренних параметров, ни от типа координатных систем.

Эта форма определяет инвариантное отношение между геометрическими объектами, представляющими разные физические величины. Представление геометрических объектов в различных системах координат (СК) согласовано определенным законом преобразования.

Независимость формулировки модели МС от выбора СК обеспечивается одинаковым порядком всех ГО, которые входят в запись уравнения в виде слагаемых. Требование инвариантности не единственно. Правильно сформулированные физические модели должны подчиняться условию независимости их формулировки от выбора систем единиц измерения. То есть отношение двух значений одной и той же величины не зависит от того, в каких единицах эта величина измерена. Данное условие должно обеспечиваться одинаковой размерностью величин, входящих в формулировку закона.

В общей технологии моделирования можно различать два способа представления моделей МС. Первый основан на использовании инвариантной формы уравнений целенаправленного движения МС с последующей настройкой параметров ГО в соответствии с моделью конкретной МС. Второй использует групповые свойства модели и должен располагать моделью какой-либо конкретной МС и преобразованиями, позволяющими переходить от данной модели к любой другой, принадлежащей данной группе.

Разумное сочетание каждого из способов представления модели следует соизмерять с целями последующих построений, а также затрачиваемыми ресурсами.

С геометрической точки зрения инвариантная модель МС содержит сразу столько символов ГО, сколько физических понятий требуется для описания явления в самой общей форме. Использование такой формализации приводит к избыточности описания каждой конкретной модели МС и объектов, в нее входящих, что, например, с вычислительной точки зрения не эффективно. Но с другой стороны, инвариантный способ описания дает возможность использовать стандартные виды преобразований при переходе от одной модели МС к другой. Вместе с процедурами планирования вычислений по структуре сложной системы, устраняющими недостатки избыточности, инвариантные модели компонентов делают однородными методы и приемы анализа МС на разных уровнях моделирования. Пожалуй, более важно, что инвариантные построения унифицируют точку зрения, формализмы сборки и анализа моделей МС, позволяют вплотную приблизиться к проблемам исследования организации МС как искусственных объектов.

Можно выделить три наиболее важных логических шага, которые приводят к тензорной методологии и формализмам построения моделей [5].

1. Первый шаг к построению моделей класса МС – декомпозиция конкретных представителей этого класса на составляющие элементы. Выделение существенных свойств (внутренних параметров), переменных параметров состояния, источников движения позволяет построить модель физического явления, которому подчиняется элемент. Но не всякая модель годится для представления физического процесса. Только скалярное уравнение тензорной природы, контравариантной или ковариантной формы, может служить базой для последующих построений и преобразований. По сути дела, базовые модели элементов это «молекулы МС», сущности, образующие базис, в который раскладывается МС из рассматриваемого класса. В качестве элементов МС при дальнейшем обобщении могут рассматриваться более сложные комплексы, устройства и машины, образующие базис для МС более широкого класса. При этом разложение любой МС на составляющие ее элементы или компоненты можно рассматривать как представление МС в некотором частном базисе или системе координат.

2. Прямой суммой базовых моделей строится инвариантная модель системы элементов. Набор базовых элементов определяется классом решаемых задач построения МС. В этом новом для нас пространстве модель поведения совокупности свободных базовых элементов содержит ГО той же природы, что и базовая модель элемента. Конструкции ГО имеют другую размерность, но тот же порядок и закон преобразования.

3. Следующий логический шаг связан с введением в представляющее пространство геометрических связей между элементами ДС. Он приводит к несколько иной скалярной форме инвариантности уравнения поведения (движения) МС. В них появляется ГО, отражающий природу геометрических связей. Используя операции преобразования инвариантных уравнений базовых элементов с помощью смешанных геометрических объектов, можно получить модели МС, имеющих различную природу, взаимосвязи и взаимодействия между элементами МС. Кроме того, они являются инвариантами и для более широкой группы преобразований. Последняя допускает операции проецирования в подпространство и обратного отображения. Конкретный вид преобразования имплицируется совокупностью уравнений связи (многообразий), которые могут дополняться последовательно. Осуществив операции проецирования ковариантных или контравариантных ГО в подпространства касательного и нормального расслоения многообразий, а также в двойственные им подпространства, можно прийти к различным формам уравнений целенаправленного движения МС.

Каждая МС, состоящая из той же конечной совокупности элементов и источников движения, может отличаться количеством и видом ограничивающих связей, которые наделяют представляющее пространство определенной структурой. Поэтому будут различными преобразования, имплицируемые данными связями, а также структура подпространств, в которые погружаются уравнения движения МС. Отсюда важный вывод: с геометрической точки зрения разнообразие МС определенного класса порождается многообразием систем координат, в которых представлены одни и те же инвариантные геометрические объекты. При этом переход от одной модели МС к другой может осуществляться регулярным образом посредством операций преобразования инвариантных геометрических объектов в ту или иную систему координат.

Полученные формы модели МС – это еще не сама модель, а некоторый каркас, в который укладываются конкретные ГО, входящие в ее уравнения. Этот каркас содержит несколько строительных блоков, в которые погружаются как свойства отдельных элементов, так и особенности организации их взаимосвязанной совокупности. Внутренние параметры элементов, параметры состояния, источники движения отображаются ГО, имеющими ковариантную или контравариантную формы представления. Свойства организации совокупности элементов полностью отображаются в смешанных ГО второго порядка – один раз контравариантных и один раз ковариантных. Их роль в построении моделей ДС чрезвычайно велика, поскольку именно они определяют структуру пространства, в котором развивается организуемое движение.

Литература:

1. Коренев Г.В. Цель и приспособляемость движений. – М.: Наука, 1974. – 528с.
2. Крон Г. Тензорный анализ сетей. – М.: Сов. Радио, 1980.
3. Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика. – М.: Наука, 1972.
4. Синдж Д.Л. Тензорные методы в динамике. – М.: ИЛ, 1947.
5. Кутергин В.А. Искусственные объекты и конструктивные процессы. Изд- во: ИПМ УрО РАН, г. Ижевск 2007, 551стр.