Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление»
www.rypravlenie.ru **том 10 № 4 (25), 2014, ст. 10**
Выпуск подготовлен по итогам IV Международной научной конференции по фундаментальным и прикладным проблемам устойчивого развития в системе «природа – общество – человек»: наука, инженерия, образование (22 декабря 2014 г.)

УДК 51-77

МОДЕЛЬ ХОЛОДНОЙ ВОЙНЫ И ОПТИМАЛЬНОГО ОТКЛИКА

Блок Виктор Рувимович, кандидат физико-математических наук

Калюжный Борис Иванович, кандидат технических наук, доцент

Аннотация

Рассматриваются две взаимосвязанные макроэкономические модели. Первая из них имеет дело с военным противостоянием двух государств, каждое из которых представлено военным и гражданским секторами – модель холодной войны. Вторая модель посвящена синтезу оптимального управления, позволяющего менее развитой экономически стране достичь хотя бы паритета в военном соревновании, несмотря на упомянутое экономическое отставание. Решается задача максимизации военного потенциала этого государства к заданному моменту времени. Показано, как и в работе [2], что оптимальное решение требует интенсивного развития сектора экономики на первой фазе, с тем чтобы в будущем использовать накопленный экономический потенциал для скорейшего наращивания военной мощи.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: макроэкономика, холодная война, военный паритет, оптимальная стратегия.

COLD WAR MODEL AND OPTIMAL RESPONSE

Blok Victor Ruvimovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences

Kalyuzhny Boris Ivanovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor

Abstract

Two interconnected macroeconomic models are considered. The first of these has to do with the military confrontation between the two countries, each represented by the military and civilian sectors - a model of the Cold War.The second model is devoted to the synthesis of optimal control, allowing less economically developed country to achieve at least parity in military competition, despite the mentioned economic backwardness. The problem of maximizing the military potential of this state at a given moment of time is considered. Shown, as in [2] that the optimal solution requires intensive development of the economic sector in the first phase, with a view to the future use of the accumulated economic potential for speedy military buildup.

KEYWORDS: macroeconomics, cold war, military parity, optimal strategy.

Введение

При моделировании военного и экономического противостояния государств с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений [1—13] широко используются модели предложенные Ричардсоном. Они сводятся к рассмотрению системы линейных дифференциальных уравнений, решение которых, как предполагается, представляет динамику военных потенциалов рассматриваемых государств.

В докладе используется подобный подход, с той разницей, что в модель включены одновременно военный и мирный макроэкономические потенциалы двух государств.

Кроме того, рассматривается задача синтеза управления [3] с целью получения максимально возможного значения военного потенциала к заданному моменту времени.

1. Основные понятия и математические модели

Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление»
www.rypravlenie.ru **том 10 № 4 (25), 2014, ст. 10**
Выпуск подготовлен по итогам IV Международной научной конференции по фундаментальным и прикладным проблемам устойчивого развития в системе «природа – общество – человек»: наука, инженерия, образование (22 декабря 2014 г.)

1.1. ***Основные понятия модели***. Каждое из государств рассматривается как единый организм, вступающий в неэквивалентный энергетический обмен с окружающей средой (Г.В. Плеханов, П.Г. Кузнецов). В результате этого обмена каждое государство получает из окружающей среды некоторое дополнительное количество обобщенного ресурса в единицу времени (например за год). В рамках этой модели ресурс разделяется на две части, одна из которых направляется в гражданский сектор экономики, другая тратится на увеличение военного потенциала.

Пусть $X(t)$ — величина ресурса в экономическом секторе к моменту времени t.

Тогда за период времени Δt государство получит дополнительное количество ресурса $kX(t)\Delta t$, где k — обобщенная производительность труда (эффективность экономики, линейная модель Фон Неймана [14]). Это количество ресурсов делится между гражданским и военным секторами так, что

(1.1) $X(t + \Delta t) = X(t) + UkX(t)\Delta t,$

где U — доля свободного ресурса $kX(t)\Delta t$, направляемого в гражданский сектор, $U \in [0, 1]$ — параметр управления.

В этом случае динамика ресурса в военном секторе, описывается как

(1.2) $Y(t + \Delta t)=Y(t)+(1 — U)kX(t)\Delta t,$

где $Y(t)$ — количество ресурсов в военном секторе в момент времени t.

Таким образом, эволюция переменных $X(t)$ и $Y(t)$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

(1.3) $\dot{X} = UkX(t);$

(1.4) $\dot{Y} = [1 - U]kX(t);$ с начальным количеством ресурсов

(1.5) $X(0) = X^0$, $Y(0) = Y^0$.

1.2. ***Модель холодной войны.*** Рассмотрим взаимодействие двух государств. Пусть одно из них обладает (по отношению ко второму) следующими особенностями:

(1) бо́льшим экономическим потенциалом гражданского сектора и

(2) бо́льшей производительностью труда.

Будем это государство называть экономически сильным государством или, следуя Ю.П. Иванилову [2], — Афинами.

Предположим, что второе государство, которое мы будем называть экономически слабым государством, или Спартой, функционирует так, что поддерживает свой военный потенциал на том же уровне, что и экономически сильное государство (Афины). Указанная доктрина заставляет руководство Спарты начать (рано или поздно) безудержную эксплуатацию своих природных ресурсов. В модели этот процесс представлен дополнительным линейным членом $(at + b)$, который является кусочно-линейной аппроксимацией функции доходов от продаж природных ресурсов. Прекращение по каким-либо причинам доходов от продаж таких ресурсов ведет к катастрофически быстрому коллапсу экономики [15].

Взаимодействие государств между собой и с окружающей средой может быть описано системой уравнений:

(1.6) $\dot{X}_1 = Uk_1X_1(t);$ Афины

(1.7) $\dot{Y}_1 = (1 - U)k_1X_1(t);$

(1.8) $\dot{X}_2 = k_2X_2(t) - Y_2(t) + at + b;$ Спарта

(1.9) $Y_2(t) = Y_1(t).$

Начальные значения:

(1.10) $X_1(0) = X_1^0, Y_1(0) = Y_1^0;$

(1.11) $X_2(0) = X_2^0, Y_2(0) = Y_2^0.$

Каждое государство располагает некоторым потоком свободных ресурсов kX. Сильная страна направляет в единицу времени $Y_1(t)$ ресурсов на оборону. В случае военного паритета слабая страна направляет такое же количество ресурсов $Y_2(t) = Y_1(t)$.

Решение, полученное ниже в разделе 2, пункт 2.1 показывает, что в определенный момент времени ее руководство, во избежание коллапса, вынуждено будет изменить свой курс и принять более гибкую военную стратегию. В 1.3 рассматривается модель такой стратегии.

1.3. *Оптимальная военная стратегия Спарты. Математическая модель*. Первая работа в этом направлении была опубликована в 1969 году Ю.П. Иваниловым [2].

Цель этого раздела — предложить аналитическую макроэкономическую модель, с тем чтобы на ее основе сформулировать закономерности перераспределения валового национального продукта между военным и гражданским секторами. Эти закономерности описывают экономику государства как в условиях интенсивной милитаризации, так и демилитаризации.

Предположим, что в момент времени t^0 в предверии экономического коллапса, связанного, в основном, с низкой производительностью труда, руководство Спарты принимает решение добиться к моменту времени $T = t^0 + \Delta T$ как минимум паритета своего военного потенциала и военного потенциала Афин.

Предположим, что существующий военный потенциал Спарты Y_2 производит некоторое дополнительное количество ресурса m_2Y_2 в единицу времени (например, продажи оружия или угроза агрессии). Доля этого продукта $V_2m_2Y_2(t)$ направляется на развитие военного сек-

Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление»
www.rypravlenie.ru **том 10 № 4 (25), 2014, ст. 10**
Выпуск подготовлен по итогам IV Международной научной конференции по фундаментальным и прикладным проблемам устойчивого развития в системе «природа – общество – человек»: наука, инженерия, образование (22 декабря 2014 г.)

тора, а оставшаяся часть $(1 — V_2)m_2Y_2$ идет на развитие гражданского сектора. Параметр управления $V_2 \in [0, 1]$ аналогичен U.

В модели рассматриваются еще два механизма, влияющие на динамику потенциалов в мирном и военном секторах Спарты: супермилитаризация и демилитаризация.

Супермилитаризация — непосредственное преобразование ресурсов гражданского сектора X_2 в военный сектор Y_2 (например, тракторного завода в танковый). Максимальная возможная скорость такого преобразования будет обозначаться R_{max}. Допустимо любое значение скорости супермилитаризации R, такое что $R \in [0, R_{max}]$.

Демилитаризация — прямое преобразование ресурсов военного сектора Y_2 в гражданский сектор X_2 с максимально возможной скоростью S_{max}. Он не может быть легко изменен в типичном обществе типа Спарты. Параметр управления $S \in [0, S_{max}]$ играет ту же роль, что и R, но только для процессов демилитаризации.

Политическая интервенция — это набор действий Спарты, направленный на то, чтобы противник уменьшил свои военные затраты. Переменная управления $P \in [P_{min}, 1]$ представляет результаты таких действий.

Уравнения и критерий. Предположим, что Спарта, истощенная военным соревнованием в окрестности момента времени, соответствующего коллапсу гражданского сектора экономики (модель холодной войны), решает достичь максимально возможного значения своего военного потенциала $Y_2(t)$ по отношению к военному потенциалу Афин к моменту времени $T = t^0 + \Delta T$, тогда критерием Φ оптимизационной задачи будет:

(1.12) $\Phi = Y_2(T) - Y_1(T) \rightarrow MAX.$

В этой модели, следуя Фон Нейману и Ричардсону, рассматривается только линейная аппроксимация. Система уравнений, описывающая динамику $X(t)$ и $Y(t)$ в зависимости от экономических, военных и политических решений (параметры $\boldsymbol{U_2}, \boldsymbol{V_2}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P}$), выглядит следующим образом:

(1.13) $\dot{X}_1 = \boldsymbol{PU}k_1(t)X_1(t);$ Афины

(114) $\dot{Y}_1 = (1 — \boldsymbol{PU})k_1X_1(t);$

(1.15) $\dot{X}_2 = \boldsymbol{U_2}k_2X_2 + (1 — \boldsymbol{V_2})m_2Y_2 + \boldsymbol{S}Y_2 — \boldsymbol{R}X_2;$ Спарта

(1.16) $\dot{Y}_2 = (1 — \boldsymbol{U_2})k_2X_2 + \boldsymbol{V_2}m_2Y_2 — \boldsymbol{S}Y_2 + \boldsymbol{R}X_2;$

(1.17) $\Phi = Y_2(T) — Y_1(T) \rightarrow MAX.$

Напомним, что ограничения на параметры управления имеют вид:

$U_2(t), V_2(t) \in [0, 1],$

Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление»
www.rypravlenie.ru **том 10 № 4 (25), 2014, ст. 10**
Выпуск подготовлен по итогам IV Международной научной конференции по фундаментальным и прикладным проблемам устойчивого развития в системе «природа – общество – человек»: наука, инженерия, образование (22 декабря 2014 г.)

$R(m) \in [0, R_{\max}]$,

$S(t) \in [0, S_{max}]$,

$P \in [P_{min}, 1]$;

Период моделирования: $t \in [t^0, T]$.

2. Аналитическое решение

2.1. ***Модель холодной войны.*** В пункте 1.2 приведена простая модель военного противостояния двух государств. Она основана на предположении, что экономически слабое государство — Спарта — старается поддержать свой военный потенциал равным военному потенциалу своего экономически сильного противника — Афин. В соответствии с этой моделью взаимодействие государств с окружающей средой и между собой было описано системой уравнений (1.6) — (1.11).

Решение этой системы имеет вид:

(2.1) $X_1(t) = X_1^0 e^{U_1 k_1 t}$;

(2.2) $Y_1(t) = Y_2(t) = Y^0 + \frac{1 - U_1}{U_1} X_1^0 [e^{U_1 k_1 t} - 1]$;

(2.3) $X_2(t) = Ce^{k_2 t} - \frac{(1 - U_1)}{U_1 k_1 - k_2} k_1 X_1^0 e^{U_1 k_1 t} - \frac{1}{k_2}(at + b + \frac{a}{k_2})$;

где $C = X_2^0 + \frac{(1 - U_1)}{U_1 k_1 - k_2} k_1 X_1^0 + \frac{1}{k_2}(b + \frac{a}{k_2})$;

а ***a*** и ***b*** описывают доход от продажи природных ресурсов $\$(t) = a_i t + b_i$ — кусочно-линейная аппроксимация.

$X_2(t)$ имеет максимум в t^*. При $a = 0$ и b = 0 явное выражение для t^* будет:

(2.4) $t^* = \frac{1}{U_1 k_1 - k_2} ln \{ \frac{k_2}{U_1 k_1} [1 + \frac{X_2^0}{X_1^0} \frac{U_1 k_1 - k_2}{(1 - U_1) k_1}] \}$.

Максимум существует, если

(2.5) $k_2 X_2^0 > (1 - U_1) k_1 X_1$;

(2.6) $U_1 k_1 > k_2$.

Первое условие (2.5) означает, что в начальный момент времени прибавочный продукт Спарты $k_2 X_2^0$ превышает ее собственные военные затраты, которые равны военным затратам Афин: $Y^0 = (1 - U_1) k_1 X_1^0$.

Существование максимума t^* соответствует экономическому росту гражданского сектора экономики Спарты в начальный период холодной войны, что позволяет правительству

Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление»
www.rypravlenie.ru **том 10 № 4 (25), 2014, ст. 10**
Выпуск подготовлен по итогам IV Международной научной конференции по фундаментальным и прикладным проблемам устойчивого развития в системе «природа – общество – человек»: наука, инженерия, образование (22 декабря 2014 г.)

Спарты оправдывать свою политику. Нарушение условий (2.5) и (2.6) приводит к монотонному спаду гражданского сектора экономики с самого начала гонки вооружений.

Момент экономического краха Спарты t^{**} наступает при коллапсе мирного сектора экономики: $X_2(t^{**}) = 0$. При a = 0 и $b = 0$ для t^{**} можно получить явное выражение:

$$(2.7) \quad t^{**} = t^{*} + \frac{ln(U_1 k_1) - ln(k_2)}{U_1 k_1 - k_2} = \frac{1}{U_1 k_1 - k_2}\, ln[1 + \frac{X_2^0}{X_1^0}\,\frac{U_1 k_1 - k_2}{(1 - U_1) k_1}];$$

2.2. ***Оптимальная стратегия милитаризации Спарты. Численные расчеты.*** Решение задачи было получено с помощью принципа максимума [3]. Поиск оптимальной стратегии милитаризации слабого государства является задачей синтеза функций управления:

$U_2(t), V_2(t) \in [0, 1]$, $R(t) \in [0, R_{max}]$, $S(t) \in [0, S_{max}]$ и $P(t) \in [P_{min}, 1]$.

Решение — оптимальное управление (принято, без ограничения общности, что $t^0 = 0$) имеет вид (2.8) – (2.12).

Где t' — момент переключения потока ресурсов с гражданского сектора на военный.

$$(2.8) \quad U_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0, t'); \\ 0 & \text{при } t \in [t', T]; \end{cases}$$

$$(2.9) \quad V_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0, t'); \\ 0 & \text{при } t \in [t', T]; \end{cases}$$

$$(2.10) \quad R(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [0, t'); \\ R_{max} & \text{при } t \in [t', T]; \end{cases}$$

$$(2.11) \quad S(t) = \begin{cases} S_{max} & \text{при } t \in [0, t'); \\ 0 & \text{при } t \in [t', T]; \end{cases}$$

$$(2.12) \quad P(t) \equiv 1.$$

Выражение для момента переключения t' имеет вид:

$$(2.13) \quad t' = T - \frac{1}{m_2 + R_{max}}\, ln(\frac{k_2 + R_{max}}{k_2 - m_2});$$

Момент переключения существует при условии:

$$(2.14) \quad k_2 > m_2 + (k_2 + R_{max})\, e^{-(m_2 + R_{max})};$$

При $(m_2 + R_{max})T >> 1$ (2.14) сводится к соотношению $k_2 > m_2$. Это означает, что в случае, когда слабое государство имеет достаточно времени и его производительность труда в экономическом секторе больше "производительности" военного сектора (что выполняется практически всегда), развитие экономики обязательно на первых фазах милитаризации.

При наличии точки переключения различные участки траектории описываются различными уравнениями. Так как на всем отрезке $[0, T]$ выполнено условие $P \equiv 1$, имеем:

$$(2.15) \quad X_1(t) = X_1^0 e^{U_1 k_1 t};$$

Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление»
www.rypravlenie.ru **том 10 № 4 (25), 2014, ст. 10**
Выпуск подготовлен по итогам IV Международной научной конференции по фундаментальным и прикладным проблемам устойчивого развития в системе «природа – общество – человек»: наука, инженерия, образование (22 декабря 2014 г.)

(2.16) $Y_1(t) = Y^0 + \frac{1 - U_1}{U_1} X_1^0[e^{U_1 k_1 t} - 1];$

Для периода времени $t \in [0, t')$ $(U_2 = 1, V_2 = 1, R = 0, S = S_{max})$ получим:

(2.17) $X_2(t) = \left(X_2^0 + Y^0 \frac{m_2 + S_{max}}{k_2 + S_{max}}\right) e^{k_2 t} - Y^0 \frac{m_2 + S_{max}}{k_2 + S_{max}} e^{-S_{max} t};$

(2.18) $Y_2(t) = Y^0 e^{-S_{max} t};$

Для периода времени $t \in [t', T]$ $(U_2 = 0; V_2 = 1; R = R_{max}; S = 0;)$ полученные решения (2.17) и (2.18) при $t = t'$ задают начальные условия X_2' и Y_2' и решение имеет вид:

(2.19) $X_2(t) = X_2' e^{-R_{max}(t - t')};$

(2.20) $Y_2(t) = \left(Y_2' + X_2' \frac{k_2 + R_{max}}{m_2 + R_{max}}\right) e^{m_2(t - t')} - X_2' \frac{k_2 + R_{max}}{m_2 + R_{max}} e^{-R_{max}(t - t)};$

Интересно отметить, что стремление Спарты максимизировать свой военный потенциал к моменту времени T заставляет ее руководство в первую очередь развивать гражданский сектор экономики. Кроме того, правительство Спарты старается уменьшить военные усилия Афин на протяжении всего периода военного противостояния ($P \equiv 1$).

Результаты расчетов приведены на рисунке 1 в правой незатененной части графика при $t \in [t^0, T]$. Первая фаза развития $[t^0, t']$ соответствует экономическому росту, демилитаризации и демократизации общества. Вторая фаза соответствует интенсивной милитаризации, переводу гражданских ресурсов в военный сектор. К моменту времени T военный потенциал "слабого государства" насколько возможно к военному потенциалу государства, упомянутого выше как "сильное". К этому моменту сектор мирной экономики слабого государства заметно истощается.

Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление»
www.rypravlenie.ru **том 10 № 4 (25), 2014, ст. 10**
Выпуск подготовлен по итогам IV Международной научной конференции по фундаментальным и прикладным проблемам устойчивого развития в системе «природа – общество – человек»: наука, инженерия, образование (22 декабря 2014 г.)

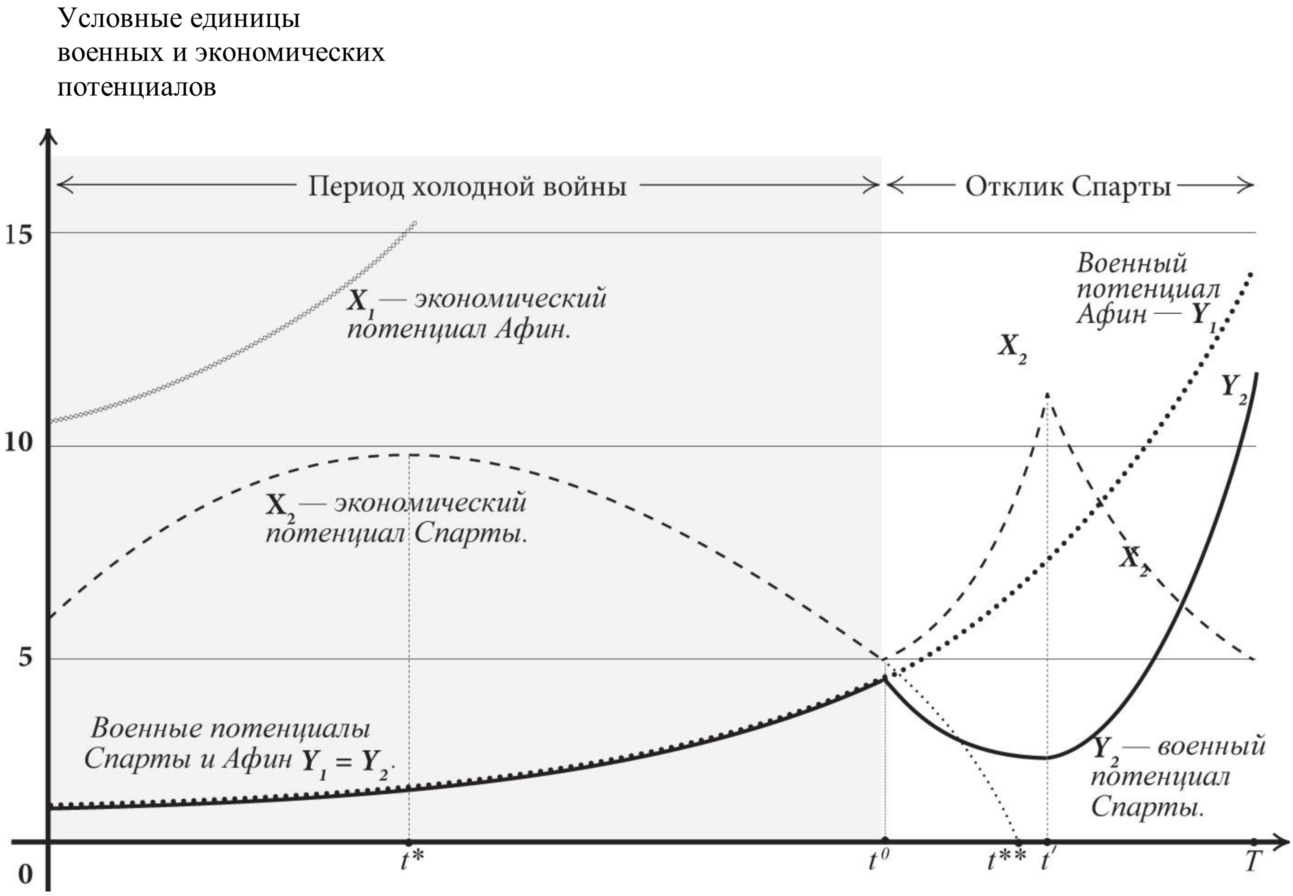

Рис. 1. Динамика военных и экономических показателей Афин и Спарты в объединении моделей холодной войны и оптимального отклика Спарты.
t^0 — момент принятия решения руководством Спарты об отказе от доктрины холодной войны.
t^{**} — момент возможного экономического коллапса Спарты.
t' — момент переключения с развития экономики на наращивание военного потенциала.

3. Обсуждение результатов

Анализ, проведенный в разделе 2, ясно показывает, что доктрина холодной войны вынуждает слабое государство истощать свои природные ресурсы и разрушать собственную экономику. Некоторые страны с большими запасами природных ресурсов и возможностью контролировать на них мировые цены могут за довольно короткий период времени накопить значительную военную мощь, продавая ресурсы и взвинчивая на них цену.

Период $[0, t^*]$ (рис. 1) соответствует росту экономики Спарты на начальной стадии, что позволяет ее правительству успешно оправдывать военную политику.

Однако в долгосрочной перспективе такая политика ведет к развалу экономики и к неспособности реализовать имперские устремления. Однако решение, полученное в рамках модели оптимального отклика, позволяют сформировать такое поведение Спарты, которое позволяет избежать экономического краха и не проиграть в военном отношении.

Представляет интерес интерпретация некоторых параметров модели отклика Спарты.

Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление»
www.rypravlenie.ru **том 10 № 4 (25), 2014, ст. 10**
Выпуск подготовлен по итогам IV Международной научной конференции по фундаментальным и прикладным проблемам устойчивого развития в системе «природа – общество – человек»: наука, инженерия, образование (22 декабря 2014 г.)

Политическая интервенция *P(t)* — это комплекс действий Спарты, направленный на то, чтобы изменить количество ресурсов, направляемых Афинами на военное строительство. Один из интересных результатов, представленных в оптимальном решении, состоит в том, что управление $P(t) \equiv 1$. Этот факт подтверждает, что вне зависимости от политического курса желание победить в военном соревновании заставляет Спарту направлять действия, которые приводят к уменьшению обороноспособности Афин.

Процесс супермилитаризации представлен в модели параметром *R(t)*. Максимально возможная скорость такого преобразования R_{max}. Значение этого параметра является отражением "национального духа" населения страны, и его трудно изменить в демократическом обществе. В частности, крайне трудно милитаризовать существенную часть гражданского сектора в демократической стране, где население подвержено интенсивной пропаганде в либерально-пацифистском духе.

Демилитаризация представлена в модели параметром *S(t)*. Это также параметр, характеризующий "национальный дух". В отличие от *R(t)* он не может быть легко изменен в обществе тоталитарного типа. Любые силы, пытающиеся переориентировать нацию в направлении наиболее эффективного развития демократической системы должны действовать достаточно долго, не теряя исходных целей, чтобы перевоспитать дестабилизирующие общество шовинистические слои населения.

Примечание 1. За недостатком места процедура использования метода максимума Понтрягина при синтезе оптимального управления приведена в приложении в сжатой форме.

Примечание 2. По тем же причинам не приведен список значений параметров модели, которые были использованы при построении графиков на рисунке 1 (некие разумные значения).

Приложение

Принцип максимума Понтрягина и синтез оптимального отклика Спарты.

Ограничения на переменные (уравнения движения) имеют вид (1.13) — (1.16) при начальный условиях (1.10) и (1.11) и ограничениях на управление:

$U_2(t), V_2(t) \in [0, 1]$, $R(t) \in [0, R_{max}]$, $S(t) \in [0, S_{max}]$ и $P(t) \in [P_{min}, 1]$.

Период моделирования [0, T]. Критерий $\Phi = Y_2(T) - Y_1(T) \rightarrow MAX$.

Гамильтониан системы: $H = \psi_{x1} P U_1 k_1 X_1 + \psi_{y1}(1 - PU_1)k_1X_1 +$

$\psi_{x2}\{(U_2k_2 - R)X_2 + [(1 - V_2)m_2 + S]Y_2\} + \psi_{y2}\{[(1- U_2)k_2 + R] X_2 + (V_2m_2 - S)Y_2\};$

Сопряженные переменные ψ удовлетворяют уравнениям:

Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление»
www.rypravlenie.ru том 10 № 4 (25), 2014, ст. 10
Выпуск подготовлен по итогам IV Международной научной конференции по фундаментальным и прикладным проблемам устойчивого развития в системе «природа – общество – человек»: наука, инженерия, образование (22 декабря 2014 г.)

$$\frac{d\Psi x1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X1} = -\psi_{x1} P U_1 k_1 - \psi_{y1}(1 - PU_1)k_1;$$

$$\frac{d\Psi y1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Y1} = 0;$$

$$\frac{d\Psi x2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X2} = -\psi_{x2}(U_2k_2 - R) - \psi_{y2}[(1 - U_2)k_2 + R];$$

$$\frac{d\Psi y2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Y2} = -\psi_{x2}[(1 - V_2)m_2 + S] - \psi_{y2}(V_2m_2 - S);$$

Сопряженные переменные ψ удовлетворяют условиям трансверсальности:

$$\psi_{x1}(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial X1} = 0; \quad \psi_{y1}(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial Y1} = -1; \quad \psi_{x2}(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial X2} = 0; \quad \psi_{y2}(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial Y2} = 1;$$

Решение:

$$\psi_{x1}(t) = k_1(1 - U_1)[t - T e^{U_1k_1(T-t)}]; \qquad \psi_{y1}(t) = -1;$$

$$\psi_{x2}(t) = \frac{k_2 + R_{max}}{m_2 + R_{max}}[e^{m_2(T-t)} + e^{-R(T-t)}]; \qquad \psi_{y2}(t) = e^{m_2(T-t)};$$

Синтез параметров управления – это максимизация гамильтониана по управлению.

$$\frac{\partial H}{\partial U2} = k_2X_2(\psi_{x2} - \psi_{y2}); \quad \frac{\partial H}{\partial V2} = -m_2Y_2(\psi_{x2} - \psi_{y2}); \quad \frac{\partial H}{\partial R} = -X_2(\psi_{x2} - \psi_{y2}); \quad \frac{\partial H}{\partial S} = U_1k_1X_1(\psi_{x1} - \psi_{y1});$$

Значит в окрестности точки T

$\frac{\partial H}{\partial U2} < 0; \rightarrow$ **$U_2 = 0$**; $\frac{\partial H}{\partial V2} > 0; \rightarrow$ **$V_2 = 1$**; $\frac{\partial H}{\partial R} > 0; \rightarrow$ **$R = R_{max}$**; $\frac{\partial H}{\partial S} < 0; \rightarrow$ **$S = 0$**; $\frac{\partial H}{\partial P} > 0; \rightarrow$ **$P = 1$**;

Это управление сохраняется пока сохраняется знак выражений $(\psi_{x1} - \psi_{y1})$ и $(\psi_{x2} - \psi_{y2})$.

Момент переключения t' параметров управления (U_2, V_2, R, S) в состояние ($U_2 = 1$, $V_2 = 0$, $R = 0$, $S = S_{max}$) определяется из условия изменения знака у $(\psi_{x1} - \psi_{y1})$, т.е. $\psi_{x1}(t') = \psi_{y1}(t')$. Так что:

$$(2.13)\quad t' = T - \frac{1}{m_2 + R_{max}} ln\left(\frac{k_2 + R_{max}}{k_2 - m_2}\right);$$

Условием существования момента переключения будет t' > 0, что приводит к

$$(2.14)\quad k_2 > m^2 + (k^2 + R_{max})\, e^{-(m^2 + R_{max})};$$

Момента переключения, который определяется параметром P, не существует. При наличии точки переключения на различных участках система описывается разными уравнениями.

Литература

1. Richardson L.F. Arms and insecurity: a mathematical study of the causes and origin of war. Pittsburgh: Boxwood Press, 1960.

2. Иванилов ЮЛ. Модель соревнования двух стран // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. 1969. № 1. Стр. 19-30.
3. Понтрягин Л.С, Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.Б., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1961.
4. Brito D.L., Intriligator M.D. Some applications of the maximum principle to the problem of an armament race. Modeling and Simulation. 1973. V. 4, p. 140-144.
5. Reitman M.J. Optimal control of desarmament using the emigration level. Journal of Peace Research, 1983 V. 20, p. 171-177.
6. Saaty P.L. Mathematical models of arms control and disarmament: application of mathematical structures in politics. N.Y., John Wiley, 1968.
7. Chase P.E. Feedback control theory and arms races. General System Yearbook. 1969. V. 14, p. 137— 149.
8. Gillespie J.V. Optimal control theory: a promising approach for future research. Search of Global Patterns. N.Y., Free Press, 1976, p. 235- 246.
9. Zinnes DA. Contemporary research in IR: a perspective and critical appraisal. N.Y. Free Press, 1976.
10. Isard W. Arms race, arms control and conflict analysis. Cambridge Univ. Press, 1988.
11. Гусейнова А.С, Павловский Ю.Н., Устинов В.А. Опыт моделирования исторического процесса. — М.: Наука, 1984.
12. Cioffi-Revilla C.A. Mathematical models in international relations: a Bibliography. Inst, for Res. in Social Science, Univ. of North Carolina at Chapel Hill, 1979.
13. Luterbacher U., Ward M.D. Dymanic models of international conflict. Boulder, Co. L. Rienner, 1985.
14. Kemeny I.G., Morgenstern P., Thompson G.L. A generalization of the von Neumann model of an expending economy. Econometrica. 1956. V. 24. № 2, p. 115-135.
15. Dobbs M. Oil's skid fluels Gorbachev's reforms. The Washington Post. 1990. № 174, p. Al and A18.