

УДК 51-74: 514.743.48

ТЕНЗОРНАЯ МЕТОДОЛОГИЯ ДЛЯ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ СИСТЕМЫ С НАЛОЖЕННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Кутергин Владимир Алексеевич, доктор технических наук, профессор, председатель совета директоров холдинга «БФГ-Групп»

Шадрин Александр Сергеевич, руководитель проектов, ООО «БФГ-Групп»

Аннотация

Статья посвящена использованию тензорной методологии поиска решения оптимальной структуры (транспортной, инфокоммуникационной) сети с наложенными ограничениями в виде физических или технологических параметров на примере транспортной задачи. Для введения ограничений предложен метод замены ветви на имитацию узловой пары, что позволяет сохранить исходную размерности пространства рассматриваемой задачи и использовать найденную программную реализацию модели поиска оптимального решения исходной задачи с иными начальными условиями без расчета новой модели для сети другой размерности. В результате найдена оптимальная структура (транспортной, инфокоммуникационной) сети по критерию минимизации стоимости доставки информационного потока получателям без необходимости проведения модернизации инфраструктуры за счет использования резервов и альтернативных маршрутов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: сеть, структура, оптимальность, транспортная задача, тензор, построение, преобразование, ограничения.

TENSOR METHODOLOGY FOR SEARCHING THE OPTIMAL STRUCTURE OF A SYSTEM WITH IMPOSED CONSTRAINTS

Kutergin Vladimir Alekseevich, Ph.D., Professor, Chairman of the board of directors of BFG-groupHoldings.

Shadrin Alexander Sergeevich, Project Manager, BFG-Group Ltd.

Abstract

The article is devoted to the use of the tensor methodology of finding the solution to the optimal structure of an (transport. Infocommunication) network with imposed constraints in the form of physical or technological parameters on the example of a transport problem. To introduce restrictions, we propose a method for replacing the branch with the imitation of the node pair, which allows us to preserve the original dimensionality of the space of the problem under consideration and use the found software implementation of the search model for an optimal solution of the original problem with different initial conditions without calculating a new model for a network of another dimension. As a result, the optimal structure of the telecommunication network was found by the criterion of minimizing the cost of delivering the information flow to the recipients without the need to upgrade the infrastructure through the use of reserves and alternative routes.

KEYWORDS: network, structure, optimality, transportation problem, the tensor, construction, conversion, constraints.

В работе [1, 12-13] рассмотрена тензорно-геометрическая постановка задачи и методы поиска решения оптимальной структуры сети на примере транспортной задачи, тензорно-геометрическая интерпретация описания [11], построения и решения сетевой транспортной задачи показана в работах [2-6], тензорная интерпретация критериев оптимальности [7]. Для прямой задачи $f(x) = c_j x^j \rightarrow \min$ приведена последовательность действий для поиска оптимального решения:

1. Задание уравнений связи, формирование матрицы прямого преобразования A_j^s ;
2. Задание допустимого распределения потоков на сети – определение независимых и базисных элементов;
3. Формирование матрицы перенумерации S_j^l для изменения порядка элементов (независимые; базисные);
4. Вычисление перенумерованной матрицы прямого преобразования $A_{.l1}^s = A_j^s S_j^{l1}$;
5. Вычисление значений потоков на сети в перенумерованном базисе $x^{.l1} = (A_{.l1}^s)^{-1} b_{\nabla}^s$;
6. Вычисление стоимости транспортировки в перенумерованном базисе $c_{.l1} = S_{l1}^k c_k$;
7. Вычисление целевой функции $f(x) = c_{.l1} x^{.l1}$;
8. Проверка оптимальности найденного решения – есть ли $c_{\lambda 1}^{\nabla} < 0$, где $c_{\lambda 1}^{\nabla} = B_{\lambda 1}^{l1} c_{.l1}$. Если среди $c_{\lambda 1}^{\nabla}$ нет отрицательных значений, то найденное решение является оптимальным, в ином случае – переходим к п.9;
9. Выбор кандидата на ввод в базис - $MIN(c_{\lambda 1}^{\nabla} < 0)$ – минимального из отрицательных значений. Ввод выбранного элемента в базис;
10. Выберем в качестве кандидата на вывод из базиса переменную, которая имеет максимальное значение среди всех отрицательных - $MAX(x_{\nabla}^{x1} < 0)$;
11. Вывод выбранного элемента из базиса. Возврат к шагу 3.

Здесь и далее: m – число узлов; n – число ветвей; $M = m - 1$ - число базисных переменных; $N = n - M$ - число независимых переменных; $s, j, k, l = \overline{(1, n)}$; $\lambda, \mu = \overline{(1, N)}$; $\kappa, h = \overline{(N + 1, N + M)}$; цифровой индекс - номер итерации; (.) - символ обозначающий объекты с упорядоченным координатным базисом.

Организовав распределение потоков в соответствии с найденным оптимальным решением, создадим сеть, которая будет обладать самыми лучшими параметрами – оптимального распределения потоков по транспортным каналам или потенциалов в узлах, гарантирующих минимальную стоимость доставки информации, или, в общем случае, ВЭИ от поставщиков к потребителям.

При этом, параметры элементов оптимальной структуры могут не соответствовать требованиям к объемам транспортировки ресурсов, что, в итоге, может привести к возникновению техногенных катастроф – пожарам из-за перегрева проводников, транспортным авариям ж/д или авто транспорта из-за превышения массы груза, не доставки в срок сообщений из-за перегрузки или уничтожению по таймауту сообщений в телекоммуникационных системах. Получается, что найденное решение является оптимальным только по условиям задачи, и должно быть адаптировано для применения на реальной структуре, имеющей ограничения.

С традиционной точки зрения достаточно расширить пропускную способность (модернизировать инфраструктуру) и можно продолжать работу сети, подогнав ее параметры под найденное решение. Но это приведет не только к росту капитальных вложений, но и к потере доходов от транспортировки на время, необходимое для выполнения работ по модернизации. В связи с чем, рассмотрим возможность перехода от найденной оптимальной структуры сети к более эффективной, учитывающей загрузку и пропускную способность элементов. Для этого введем столбец W^j , обозначающий физические или технологические ограничения на максимальное значение потоковых переменных x^j . В результате, в прямой задаче поиска оптимального решения транспортной задачи [1] добавится ограничение (3):

$$f(x) = c_j x^j \rightarrow \min \quad (1)$$

$$A_j^x x^j = b_j^x \quad (2)$$

$$x^j \leq W^j \quad (3)$$

В случае, если ограничение (3) выполняется, найденное оптимальное решение транспортной задачи по критерию минимизации не противоречит физическим или технологическим ограничениям, и может быть использовано.

В обратном случае, если ограничение (3) не выполняется, использование найденного распределения потоков приведет вместо минимизации затрат к сбою, аварии или технологической катастрофе, т.е. к противоположному результату. Так как на основании (2) распределение потоков на сети является следствием матрицы прямого преобразования A_j^x (то есть, уравнений связи наложенных на сеть, и, следовательно, структуры сети) и значения внешнего потока b_j^x , то снизить x^j возможно следующими способами:

1. Снижением значения внешнего потока b_j^x , что приведет к уменьшению нагрузки на сеть, но не позволит доставить всю передаваемую информацию потребителям;

2. Управлением структурой сети с целью поиска структуры, обеспечивающей максимально близкое к оптимальному распределение потоков с учетом (3).

Рассмотрим фрагмент сети в виде треугольника, показанный на рис. 1, параметры для сети приведены в табл. 1. Найдем оптимальное распределение потоков на сети с использованием алгоритма, приведенного в начале статьи.

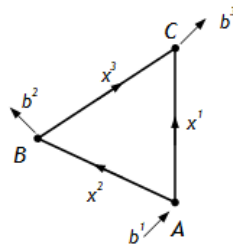


Рис. 1. Фрагмент сети

Таблица 1. Параметры сети

Стоимость транспортировки по ветви	c_1	c_2	c_3
	10	10	10
Внешний поток	b^1	b^2	b^3
	200	0	200
Налагаемое ограничение на пропускную способность	W^1	W^2	W^3
	100	100	100

Для данной сети $m = 3$ – число узлов; $n = 3$ – число ветвей; $M = m - 1 = 2$ – число базисных переменных; $N = n - M = 1$ – число независимых переменных.

Уравнения связи для узлов сети:

$$A: -x^1 - x^2 + b^1 = 0$$

$$B: x^2 - x^3 - b^2 = 0$$

$$C: x^1 + x^3 - b^3 = 0$$

или

$$A: -x^1 - x^2 = -b^1$$

$$B: x^2 - x^3 = b^2$$

$$C: x^1 + x^3 = b^3$$

Число независимых уравнений $M = 2$, следовательно, одно из уравнения связи можно исключить, пусть это будет уравнение для узла С.

Тогда, матрица прямого преобразования примет вид:

$$A_j^s = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

В качестве базисного (допустимого решения) примем показанную на рис. 2 конфигурацию (базисные переменные показаны более толстыми линиями).

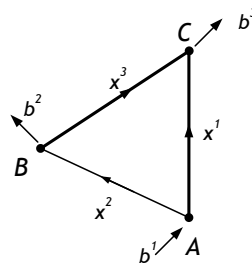


Рис. 2. Базисное решение

Независимые переменные: $x^\lambda = \{x^2\}$, Базисные переменные: $x^\kappa = \{x^1, x^3\}$.

Упорядочим последовательность переменных

x^1	x^1	x^2	x^3
x^j	x^2	x^1	x^3
s_j^j	$s_2^1 = 1$	$s_1^2 = 1$	$s_3^3 = 1$

Матрица перенумерации будет иметь следующий вид:

$$S_j^{l1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Тогда, матрица прямого преобразования координат нового представления потокового вектора и старого, но имеющего другой произвольный порядок обозначения будет иметь вид [1]:

$$A_{.l}^s = A_j^s S_l^j \quad (4)$$

Получаем следующую структуру:

$$A_{.l1}^s = \begin{vmatrix} \delta_\lambda^\mu & 0 \\ A_{. \lambda}^\kappa & A_{.h}^\kappa \end{vmatrix}, \text{ где } \delta_\lambda^\mu \text{ – символ Кронекера.}$$

$$A_{.l1}^s = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Значения потоков в новой системе координат (СК): $x_{\bar{v}}^s = A_{.l1}^s x_{.l1}^{l1}$

Следовательно, в перенумерованной исходной СК значения потоков можно высчитать по формуле [1]:

$$x_{.l1}^{l1} = B_s^{.l1} x_{\bar{v}}^s = B_s^{.l1} b_{\bar{v}}^s$$

где $B_s^{.l1} = (A_{.l1}^s)^{-1}$ — матрица обратного преобразования:

$$x^{l1} = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -200 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 200 \\ 0 \end{array} \right|$$

Стоимость транспортировки в перенумерованном базисе:

$$c_{.l1} = S_{.l1}^k c_k = \left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 10 & 10 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 10 & 10 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 10 & 10 & 10 \end{array} \right| \quad (5)$$

Значение целевой функции:

$$f_{\text{исх}}(x) = c_j x^j = c_{.l1} x^{l1} = \left| \begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & 10 & 0 \\ & & & 200 \\ & & & 0 \end{array} \right| = 2000$$

Выполним проверку наличия кандидатов на ввод в базис (оптимальности найденного решения):

$$c_{.l}^{\nabla} < 0 \quad (6)$$

$$c_{.1}^{\nabla} = (A_{.1}^{l1})^{-1} c_{.l1} = \left| 10 \right|$$

Условие (6) не выполняется, следовательно, кандидаты на ввод в базис отсутствуют, и найденное решение является оптимальным по критерию минимизации.

Значения потоков в исходной СК вычислим по формуле: $x^j = (S_j^{l1})^T x^{l1}$

$$x^j = \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 200 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right|$$

Оптимальное решение показано на рис. 3. Отметим, что распределение трафика на сети (маршруты) с использованием протоколов маршрутизации в телекоммуникационных сетях (как наиболее управляемых из всех видов транспортных сетей), не зависимо от используемого алгоритма маршрутизации – дистанционно векторного (DVA) или состояния линий связи (LSA) будет идентично найденному оптимальному решению [8].

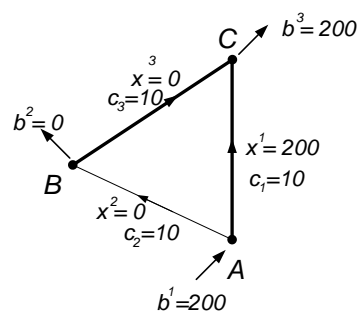


Рис. 3. Оптимальное решение транспортной задачи по критерию минимизации

Выполнив проверку ограничения (3) мы видим, что для ветви 1 имеет место быть перегрузка $x^1 = 200 > W^1 = 100$. Для ограничения пропускной способности проведем замену ветви 1 на имитацию узловой пары:

1. Введем изменения в строку c_1 , увеличив стоимость транспортировки для преобразуемой ветви до большого значения: $c'_1 \gg \sum_j c_j$, $c'_1 = c_1 + 1000$, что обеспечит при работе алгоритма поиска оптимального решения по критерию минимизации использование данной ветви в последнюю очередь;
2. Откорректируем значения внешних потоков для узлов, примыкающих к преобразуемой ветви – представим, что поток значением численно равным W^1 выводится в узле, где от которого начинается ветвь 1 (A) и заново вводится в узле, к которому данный приходит данная ветвь (C): $b_i^1 = b^1 - W^1$, $b_i^2 = b^2 + W^1$, т.е. имитируем, что поток значением численно W^1 был передан по ветви 1;
3. Запомним, что в исходной СК ограничен поток по ветви 1: $x_*^1 = W^1$;
4. Откорректируем значение ограничения для ветви 1: $W_i^1 = 0$.

(\cdot) – символ, обозначающий объекты с введенными ограничениями.

Внесенные изменения в параметры ветви 1 аналогичны используемому Г. Кроном [9] преобразованию ветви в узловую пару: когда ветвь, по которой протекает контурный ток i^a , раскрывается, эта частная контравариантная переменная обращается в нуль. Вместо нее возникает другая переменная, которая, однако, является ковариантной, а именно, разность потенциалов E_a на открытой ветви. Во время добавления и устранения связей структура динамической системы не изменяется, а наличие связей только изменяет относительное число ковариантных и контравариантных переменных, сумма которых при этом остается постоянной.

В случае транспортной задачи рассматривается контурная сеть, изменение контравариантной (ветвь) в ковариантную (пара узлов) переменную не возможно (это приведет к уменьшению количества ветвей и, следовательно, изменению размерности пространства сети и переходу к решению новой задачи) поэтому введем искусственное ограничение на использование ветви для транспортировки ($c'_1 \gg \sum_j c_j$), с одновременной компенсацией влияния на остальную часть сети данного ограничения путем изменения значений внешних потоков в примыкающих узлах, численно компенсирующих введенное

ограничение. При следующей итерации потоковая переменная x^1 перейдет из базисной в независимую (т.к. стоимость транспортировки по данной ветви станет огромной по сравнению с альтернативными маршрутами), что выполняется при использовании матрицы перенумерации S_i^j , которая вызовет преобразование матрицы A_j^s в соответствии с (4).

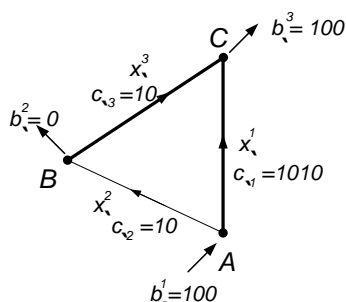


Рис. 4. Схема сети после внесения искусственных ограничений для компенсации перегрузки

Таким образом, мы перейдем к новой структуре, в которой транспортировка по ветви 1 будет запрещена высокой стоимостью, и, следовательно, при наличии резервных путей избыточная нагрузка будет перераспределена по сети с использованием алгоритма поиска оптимального решения транспортной задачи по критерию минимизации. Фактически мы будем решать ту же самую задачу, но с иными начальными условиями (см. табл.2), что позволяет автоматизировать поиск оптимального решения с учетом наложенных ограничений.

Таблица 2. Параметры сети после введения искусственных ограничений

Стоимость транспортировки по ветви	c_1	c_2	c_3
	10	10	10
Внешний поток	b^1	b^2	b^3
	100	0	100
Налагаемое ограничение по пропускной способности	w^1	w^2	w^3
	0	100	100

В качестве допустимого решения примем то же самое, что и при решении исходной задачи: независимые переменные: $x^{\lambda} = \{x^2\}$, базисные переменные: $x^{\pi} = \{x^1, x^3\}$.

Следовательно, матрицы прямого преобразования A_j^s , перенумерации S_j^{l1} , перенумерованная матрица прямого преобразования $A_{.l1}^s$ и перенумерованная матрица обратного преобразования $B_s^{.l1}$ не изменятся.

$$\text{Тогда потоки на сети: } x^{l1} = B_s^{l1} b_v^s = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 100 \\ 0 \end{array} \right|$$

Стоимость транспортировки в перенумерованном базисе вычислим по формуле (5):

$$c_{\cdot l1} = S_{\cdot l1}^k c_k = \left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 10 & 10 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 10 & 10 \end{array} \right| = |10 \quad 1010 \quad 10|$$

Значение целевой функции:

$$f(x) = c_{\cdot l1} x^{l1} = |10 \quad 1010 \quad 10| \left| \begin{array}{c} 0 \\ 100 \\ 0 \end{array} \right| = 101000$$

Выполним проверку на наличия кандидатов на ввод в базис (6):

$$c_{\cdot 1}^v = (A_{\cdot 1}^{l1})^{-1} c_{\cdot l1} = |-990| < 0, x^1 \text{ является кандидатом на ввод в базис.}$$

Введем данную ветвь в контур. Если постепенно увеличивать значение x^1 , то ветвям, входящим в контур с положительным знаком необходимо добавлять данное значение, а ветвям с отрицательным знаком вычитать данное значение. Это связано с необходимостью балансировки потоков, входящих в образованный замкнутый контур. Поскольку потоки должны оставаться положительными, то мы не можем бесконечно увеличивать x^1 , а только до минимального значения потока x^{l1} , имеющих отрицательный знак в $B_{\cdot 1}^{l1}$:

$$B_{\cdot 1}^{l1} = \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right| \quad x^{l1} = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 100 \\ 0 \end{array} \right|$$

В данном случае, кандидатом на вывод из базиса является только поток x^2 .

Введем в базис x^1 и выведем из базиса x^2 , независимые и базисные переменные станут следующими:

$$\text{Независимые переменные: } x^{\lambda} = \{x^2\}, \text{ Базисные переменные: } x^{\kappa} = \{x^1, x^3\}.$$

Матрица перенумерации примет вид:

$$S_{l1}^{l2} = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$S_j^{l2} = S_j^{l1} S_{l1}^{l2} = \left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = \delta_j^{l2}$$

$$A_{\cdot l_2}^s = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, B_{\cdot l_2}^s = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$x_{\cdot l_2}^{l_2} = B_{\cdot l_2}^s b_{\cdot l_2}^s = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \end{vmatrix}$$

$$c_{\cdot l_2} = S_{\cdot l_2}^k c_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} |1010 \ 10 \ 10| = |1010 \ 10 \ 10|$$

$$f(x') = c_{\cdot l_2} x_{\cdot l_2}^{l_2} = |1010 \ 10 \ 10| \begin{vmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \end{vmatrix} = 2000$$

Выполним проверку наличия кандидатов на ввод в базис (оптимальности найденного решения) $c_{\cdot l_2}^{\nabla} < 0$:

$$c_{\cdot l_2}^{\nabla} = (A_{\cdot l_2}^s)^{-1} c_{\cdot l_2} = |990|$$

Условие (6) не выполняется, следовательно, кандидаты на ввод в базис отсутствуют, и найденное решение является оптимальным.

Значения потоков в исходной СК: вычислим по формуле:

$$x^j = (S_j^{l_2})^T x_{\cdot l_2}^{l_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \end{vmatrix}$$

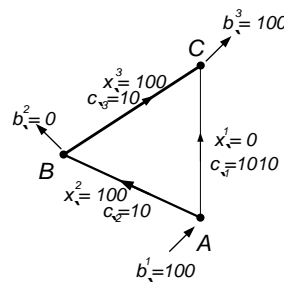


Рис. 5. Оптимальное решение транспортной задачи по критерию минимизации с наложенными ограничениями

Выполним проверку на выполнения ограничения (3)

$$x^j = \begin{vmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \end{vmatrix} \leq W^j = \begin{vmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \end{vmatrix}$$

Т.к. ограничение (3) выполняется, найденное решение транспортной задачи по критерию минимизации является оптимальным. После того, как найдено решение не

противоречащее наложенным ограничениям, необходимо к найденному решению прибавить отрезервированные значения x_*^j для нахождения полных значений потоков и значения целевой функции:

$$x_{\text{полн}}^j = x^j + x_*^j = \begin{vmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{vmatrix}$$

$$f_{\text{полн}}(x) = c_j x_{\text{полн}}^j = |10 \ 10 \ 10| \begin{vmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{vmatrix} = 3000$$

В результате использования предлагаемого решения найденное значение целевой функции $f_{\text{полн}}(x) = 3000$, что превышает значение целевой функции для варианта, без проверки на ограничение пропускной способности $f_{\text{исх}}(x) = 2000$. Вместе с тем, $f_{\text{полн}}(x)$ учитывает использование резервов и альтернативных маршрутов, что позволяет доставить от отправителя к получателю весь требуемый поток в необходимый момент (см. рис. 6) без необходимости проведения модернизации инфраструктуры, что требуется при использовании исходного распределения потоков на сети (см. рис. 3). Кроме того, в результате проведения модернизации инфраструктуры стоимость транспортировки по элементам сети может значительно увеличиться [10], и найденное значение целевой функции $f_{\text{исх}}(x)$ также возрастет.

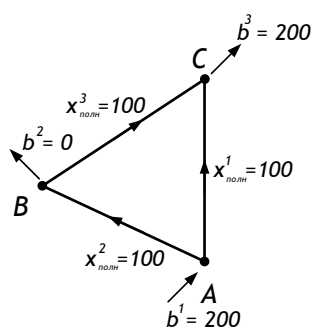


Рис. 6. Оптимальное решение транспортной задачи по критерию минимизации с учетом использованных резервов и альтернативных маршрутов

Таким образом, в статье рассмотрена возможность повышения эффективности управления материальными потоками, потоками информации в распределенных сетях за счет управления структурой сети. Рассмотрено решение транспортной задачи по критерию минимизации с учетом использованных резервов и альтернативных маршрутов, показана возможность доставки потока информации без необходимости проведения модернизации инфраструктуры.

Литература

1. Кутергин В.А., Тензорная методология для поиска оптимальной структуры системы / Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление, Т. 8, № 2, С. 74-106, 2012.
2. Кутергин В.А., Шадрин А.С. Тензорный метод построения моделей базовых элементов пространства инфокоммуникационных сетей / Вестник Ижевского Государственного Технического Университета, s№ 3, С. 166-169, 2009
3. Кутергин В.А., Шадрин А.С. Тензорный метод построения моделей пространства инфокоммуникационных сетей: объединение элементов в сеть, степени свободы и реакция связи / Вестник Ижевского государственного технического университета, № 1, С. 89-91, 2010.
4. Кутергин В.А., Шадрин А.С. Тензорный метод построения моделей пространства инфокоммуникационных сетей / Вычислительные сети. Теория и практика, Т. 15, № 2, С. 1-5, 2009.
5. Кутергин В.А., Шадрин А.С. Геометрия пространства моделей инфокоммуникационных сетей / Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление, Т. 6, № 2, С. 1-14, 2010
6. Пасечников И.И. Методология анализа и синтеза предельно нагруженных информационных сетей – М.: Издательство Машиностроение-1, 2004 - 147 с.
7. Кутергин В.А. Искусственные объекты и конструкционные процессы – Ижевск, Издание УрО РАН ИПМ, 2007 г. - 551 с.
8. Искусство оптимизации трафика. URL: <https://www.osp.ru/lan/2002/12/135572/> (дата обращения: 26.05.2018)
9. Крон Г., Тензорный анализ сетей. – М.: Советское радио, 1978 – 720 с.
10. ВШЭ: услуги связи могут подорожать из-за импортозамещения оборудования. URL: <https://www.vedomosti.ru/technology/articles/2016/02/01/626194-dorogoi-patriotizm> (дата обращения: 26.05.2018).
11. Корнев Г.В., Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. — М.: Издательство МФТИ, 2000. — 240 с.
12. Петров А.Е., Тензорная методология в теории систем. – М.: Радио и связь, 1985 г. – 152 с.
13. Тензорная методология в информационных сетях : научное издание / Е. В. Веревкина, М. О. Захарченко, М. Н. Петров ; Науч.-исслед. ин-т систем упр., волновых процессов и технологий м-ва образования Рос. Федерации. - Красноярск : НИИ СУВПТ, 2001. - 158 с.