

УДК 338.26.015:658.5

## НЕПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ, ДВОЙСТВЕННЫЕ СЕТИ, ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ПОТОКА ЭНЕРГИИ: ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА, КОТОРАЯ ПОКА НЕ РЕШЕНА

Петров Андрей Евгеньевич, доктор технических наук, профессор кафедры автоматизированного проектирования и дизайна, ФГБОУ высшего образования «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС» (НИТУ МИСиС)

### Аннотация

*Двойственность для непланарных сетей является фундаментальной проблемой, которая пока не решена. Куратовский [5] показал, что не существует графа, сети, двойственной к непланарной сети. Он показал, что есть только два таких графа, которые нельзя изобразить на плоскости без самопересечений. Это двудольный граф на шести вершинах, в котором девять ребер и полный граф на пяти вершинах, в котором десять ребер. Структуру сетей, двойственных к не планарным сетям изобразить нельзя, однако оказалось, что им соответствуют матрицы преобразования, по которым можно рассчитать отклики на воздействия. Таким образом сетей нет, но потоки в них есть, хотя они обладают странными свойствами. Поскольку двойственная сеть может (должна) располагаться в пространстве, двойственном наблюдаемому пространству, где находится заданная сеть, то непланарные сети могут оказаться местом контакта этих пространств.*

*Двойственной сети соответствует матрица преобразования путей, которая ортогональна к матрице преобразования исходной сети. Странность ситуации с не планарностью состоит в том, что, соединяя отдельные ветви (девять или десять) во все более сложные сети, каждый раз получается и двойственная сеть. Ее можно построить на плоскости как двойственный граф, или по матрице преобразования, ортогональной к заданной сети. Когда при соединении ветвей доходим до не планарной сети – двойственная сеть «исчезает», но при дальнейшем соединении ветвей – она опять существует.*

*Можно было ожидать, что раз для непланарной сети нет двойственной сети, то нет и ее матрицы преобразования путей при переходе от простейшей сети отдельных ветвей к соединенной сети. Или эта матрица имеет какие-то особенности. Оказалось, что матрица преобразования непланарной сети имеет обратную матрицу, т.е. особенностей, сингулярности, здесь нет. Транспонируя эту обратную матрицу, получим ортогональную матрицу, которая должна соответствовать матрице преобразования двойственной сети.*

*Теоретически, построить по этой матрице двойственную к непланарной сети нельзя. Однако при попытке построения получается, что «двойственная» сеть к двудольному графу на шести вершинах, похожа на полный граф на пяти вершинах, хотя и не до конца – одной ветви как бы не хватает. При попытке построения «двойственной» сети к полному графу на пяти вершинах получается сеть, похожая на двудольный граф на шести вершинах, хотя и не совсем – одна ветвь оказывается, как бы лишней.*

*Таким образом, матрица преобразования непланарной сети существует, показывая, что должна существовать и соответствующая ей сеть. По матрице преобразования двойственной сети к непланарной сети можно рассчитать матрицу решения сети, представленную метрическим тензором ее структуры, хотя нельзя явно представить ее вид. В статье рассмотрены результаты исследования структуры и процессов в сетях, двойственных к непланарным сетям, которые нельзя изобразить.*

*Прикладной интерес данной проблемы состоит в том, что двудольный граф на шести вершинах можно трактовать как три отрасли, производящие продукты, и соединенные поставками, т.е. этот граф входит в суть экономики, и ее модели. Сеть денежных средств двойственная к сети производства продуктов. Непланарный граф в сети потоков продуктов может породить несоответствия, противоречия в сети потоков денег.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** непланарный граф, двойственная сеть, матрица преобразования, инвариант двойственности, закон сохранения потока энергии.

## NONPLANAR GRAPHS, DUAL NETWORKS, THE LAW OF CONSERVATION OF ENERGY FLOW: A FUNDAMENTAL PROBLEM THAT REMAINS UNRESOLVED

Petrov Andrey Evgenievich, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Computer-Aided Design and Engineering, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “National University of Science and Technology “MISIS” (NUST MISIS)

## Abstract

*Duality for nonplanar networks is a fundamental problem that remains unresolved. Kuratowski [5] showed that there is no graph or network dual to a nonplanar network. He demonstrated that there are only two such graphs that cannot be represented on a plane without self-intersections: the bipartite graph on six vertices with nine edges and the complete graph on five vertices with ten edges. The structure of networks dual to nonplanar networks cannot be represented, but it turns out that they correspond to transformation matrices that can be used to calculate responses to influences. Thus, there are no networks, but flows in them do exist, although they have strange properties. Since the dual network can (must) be located in a space dual to the observed space where the given network resides, nonplanar networks can be the contact point between these spaces.*

*A dual network corresponds to a path transformation matrix that is orthogonal to the transformation matrix of the original network. The strange thing about nonplanarity is that, by connecting individual branches (nine or ten) into increasingly complex networks, a dual network is always obtained. This can be constructed on a plane as a dual graph, or using a transformation matrix orthogonal to the given network. When connecting branches and reaching a nonplanar network, the dual network "disappears," but with further connections, it reappears.*

*One might expect that since there is no dual network for a nonplanar network, there would also be no transformation matrix for its paths when going from the simplest network of individual branches to a connected network. Or perhaps this matrix has some singularities. It turns out that the transformation matrix of a nonplanar network has an inverse matrix, meaning there are no singularities. Transposing this inverse matrix yields an orthogonal matrix, which should correspond to the transformation matrix of the dual network.*

*Theoretically, it is impossible to construct a network dual to a nonplanar network using this matrix. However, when attempting to construct it, it turns out that the "dual" network of a bipartite graph on six vertices is similar to the complete graph on five vertices, although not completely – one branch is missing. When attempting to construct a "dual" network of a complete graph on five vertices, the resulting network is similar to the bipartite graph on six vertices, although not completely – one branch appears to be superfluous.*

*Thus, the transformation matrix of a nonplanar network exists, indicating that a corresponding network must also exist. Using the transformation matrix of a network dual to a nonplanar network, one can calculate the network's solution matrix, represented by the metric tensor of its structure, although its form cannot be explicitly represented. This article discusses the results of research into the structure and processes in networks dual to nonplanar networks that cannot be represented. The practical interest of this problem lies in the fact that a bipartite graph on six vertices can be interpreted as three product-producing industries connected by supplies, i.e., this graph is at the core of economics and its model. The money supply network is dual to the product production network. A nonplanar graph in the product flow network can generate inconsistencies and contradictions in the money supply network.*

KEYWORDS: nonplanar graph, dual network, transformation matrix, duality invariant, energy flow conservation law.

## Введение

Технические, экономические, биологические системы состоят из элементов, связи которых между собой образуют структуру. В элементах протекают процессы в виде потоков одних величин под действием других величин при сопротивлении материи элементов. Системы растут, элементов становится больше, структура связей сложнее. Скорость обновления систем, их структуры связей, включая системы вооружений, требует применения моделей, представляющих такие изменения. Для анализа и управления надо создавать модели, которые представляют процессы в системе, и обеспечивают расчет их изменения при изменении структуры связей.

Сетевые модели представляют процессы и структуру сложных технических, экономических, биологических систем, позволяя анализировать изменения процессов при изменении структуры. Структура представляет свойства пространства нашего мира, которые стали проявляться при росте сложности систем. Сети представляют параметры процессов как компоненты, проекции в системы координат пространства структуры. Координатами

являются замкнутые и разомкнутые пути. Они образуют два независимых, и при этом взаимно дополняющих друг друга подпространства.

Пионер тензорного анализа сетей Г. Крон рассматривал набор ветвей как тензор, а соединения ветвей в разные сети – как проекции этого тензора в частные системы координат. В методе Крона было две проблемы. Для получения формулы преобразования напряжения он постулировал, что мощность в сети не меняется при изменении соединения ветвей. Это критиковали, поскольку мощность при этом меняется. Но полученные формулы давали правильные результаты при расчете сетей, а также созданных на их основе сетевых моделей технических и экономических систем. Проблему инварианта мощности Крона безуспешно пытались решать сотрудник Эйнштейна Б. Гоффман (B. Hoffmann) [3–4], тополог Дж. Росс (J.P. Roth) [6–7], сотрудник Крона по Дженерал Электрик Х. Хэпп [8, 1974] и другие.

Другая проблема состояла в том, что матрицы преобразования путей в общем случае прямоугольные, и они не имеют обратных. Пути являются координатами в пространстве структуры, т.е. пространстве, которое существует только вдоль элементов сети, системы. При изменении соединений ветвей размерность базисов замкнутых и разомкнутых путей меняется. При слиянии границ ветвей разомкнутый путь превращается в замкнутый, и наоборот. При этом меняется размерность подпространств этих путей, а значит матрицы преобразования путей становятся прямоугольными. Такие матрицы не имеют обратных, и получается, что из описания соединения ветвей нельзя представить разъединение ветвей.

Противоречие с неправильным постулатом об инварианте мощности, который дает правильные результаты, разрешил автор [10–12, 32–34]. Оказалось, что мощность в двух сетях с двойственной структурой постоянная при изменении соединения их ветвей, хотя в каждой сети мощность меняется. При этом увеличению, например, числа контуров в одной сети, соответствует уменьшение числа контуров в двойственной сети, и можно с помощью инварианта двойственности получить решение формально «вырожденной» задачи.

Таким образом, проблема постулата Крона об инварианте мощности была решена, также как и проблема прямоугольных матриц преобразования. Однако возникла другая проблема, которая может стать новой точкой развития знания о свойствах нашего мира.

Инвариант двойственности пространства представляет собой постоянство суммы метрических тензоров двойственных сетей при изменении их структуры, даже когда в сети нет потоков, процессов. Когда в сети есть процессы, воздействия и отклики, то инварианту двойственности соответствует постоянство суммы мощностей, потока энергии, в двух сетях с двойственной структурой. Это физический закон сохранения, такого же типа, как и уже

известные, которые связаны с разными видами симметрии пространства и времени. Закону сохранения энергии соответствует симметрия времени, закону сохранения импульса соответствует симметрия (однородность) пространства, закону сохранения момента импульса соответствует симметрия направлений в пространстве (изотропия). Закону сохранения потока энергии, который измеряется мощностью, соответствует двойственность пространства. Речь идет, конечно, о замкнутых системах.

Двойственность структуры является свойством самого пространства, которое состоит в том, что сами сети как элементы пространства, без потоков энергии, без физических величин, обладают инвариантом двойственности.

Законы сохранения определяют свойства пространства или свойства пространства определяют законы сохранения? Есть ли «пустое» пространство без материальных объектов, образующих замкнутые системы? Инвариант двойственности для одномерных сетей является математическим требованием существования другого пространства, двойственного по отношению к нашему пространству. Наше пространство существует вместе с дополнительным, двойственным пространством, с которым они составляют единое целое.

Поток энергии, измеряемый мощностью, распределяется между двумя двойственными сетями. Величина мощности в каждой из них зависит от структуры соединения ветвей, но сумма мощностей постоянна. Таким образом, мощность является инвариантом относительно преобразования структуры двойственных сетей.

Инварианты двойственности для многомерных сетей, которые еще не открыты, могут указать на многообразие пространств, в которых координатами являются многомерные пути. Одномерные замкнутые и разомкнутые пути – это линии, но они фундаментально различны. Замкнутый путь можно выразить через разомкнутые пути. Разомкнутый путь нельзя выразить через замкнутые пути. Разомкнутый путь одномерный – это линия, отрезок. Замкнутый путь – это также линия, но она охватывает двумерную поверхность, то есть, вводит новое измерение. Аналогично, замкнутый двумерный путь, состоящий из граней, охватывает трехмерный объем, т.е. вводит следующее новое измерение. И так далее...

В двойственных сетях существует проблема непланарных графов, т.е. таких, которые нельзя изобразить на плоскости без самопересечения ветвей, ребер. Для сетей, представленных такими графами, нельзя представить, показать двойственную сеть. Куратовский доказал, что есть только два таких непланарных графа. Рассмотрим эти графы, и возникающие в них проблемы, которые имеют вид противоречия.

Противоречие постулата Крона, состояло в том, что неправильное допущение дало правильный метод расчета. Разрешением этого противоречия стало открытие инварианта двойственности. Пока нет ясности, чем станет разрешение противоречия между существованием решения задачи сети для непланарных графов, и невозможностью изобразить структуру, конструкцию таких сетей.

### **Непланарность графов и двойственность сетей**

В двойственных сетях существует особенность, которая имеет характер противоречия. Нельзя наглядно построить граф с двойственной структурой для непланарного графа. Для непланарного графа двойственный граф не существует. На эту особенность указал автору в 1984 г. В.А. Горбатов.

С одной стороны, это вносит теоретические трудности в инвариант двойственных сетей. А, следовательно, и в постоянство мощности при изменении структуры двойственных цепей, в закон сохранения потока энергии. Как только изменение структуры сети приводит к возникновению в ней непланарного графа, двойственная сеть как бы перестает существовать, во всяком случае, ее нельзя представить наглядно. Это должно создавать трудности при измерении результатов и т.д. Вместе с тем, как только в процессе изменений структуры непланарность в сети исчезает, то для нее снова существует двойственная сеть. Это указывает, что существует какая-то, еще не известная закономерность, с которой связаны такие эффекты.

Противоречие между постулатом об инварианте мощности Крона и реальным изменением мощности в электрической цепи при изменении структуры открыло, что существуют сети с двойственной структурой, с инвариантом, который связывает изменения структуры двойственных сетей. Для двух двойственных цепей, а не для одной, выполняется закон сохранения потока энергии. Это разрешило противоречие Крона в соответствии с принципами диалектики. Нечто подобное должно быть и для двойственных инвариантов в условиях непланарности. Разрешение данного противоречия может открыть новые свойства, касающиеся характера *границ*, связывающих двойственные сети, и механизма взаимодействия этих сетей при изменении структуры, которые пока неизвестны.

Итак, теория графов утверждает, что двойственный граф можно построить только для планарного графа. То есть, для такого графа, который можно изобразить на плоскости без самопересечения ветвей (ребер). Неplanарный граф не имеет двойственного графа ([9, 1984]. Невозможность построить двойственный граф к неplanарному графу, связана с тем, что в области, где ветви пересекаются, нельзя однозначно указать, в каком именно контуре должен располагаться соответствующий узел двойственного графа (сети). То есть, иначе говоря,

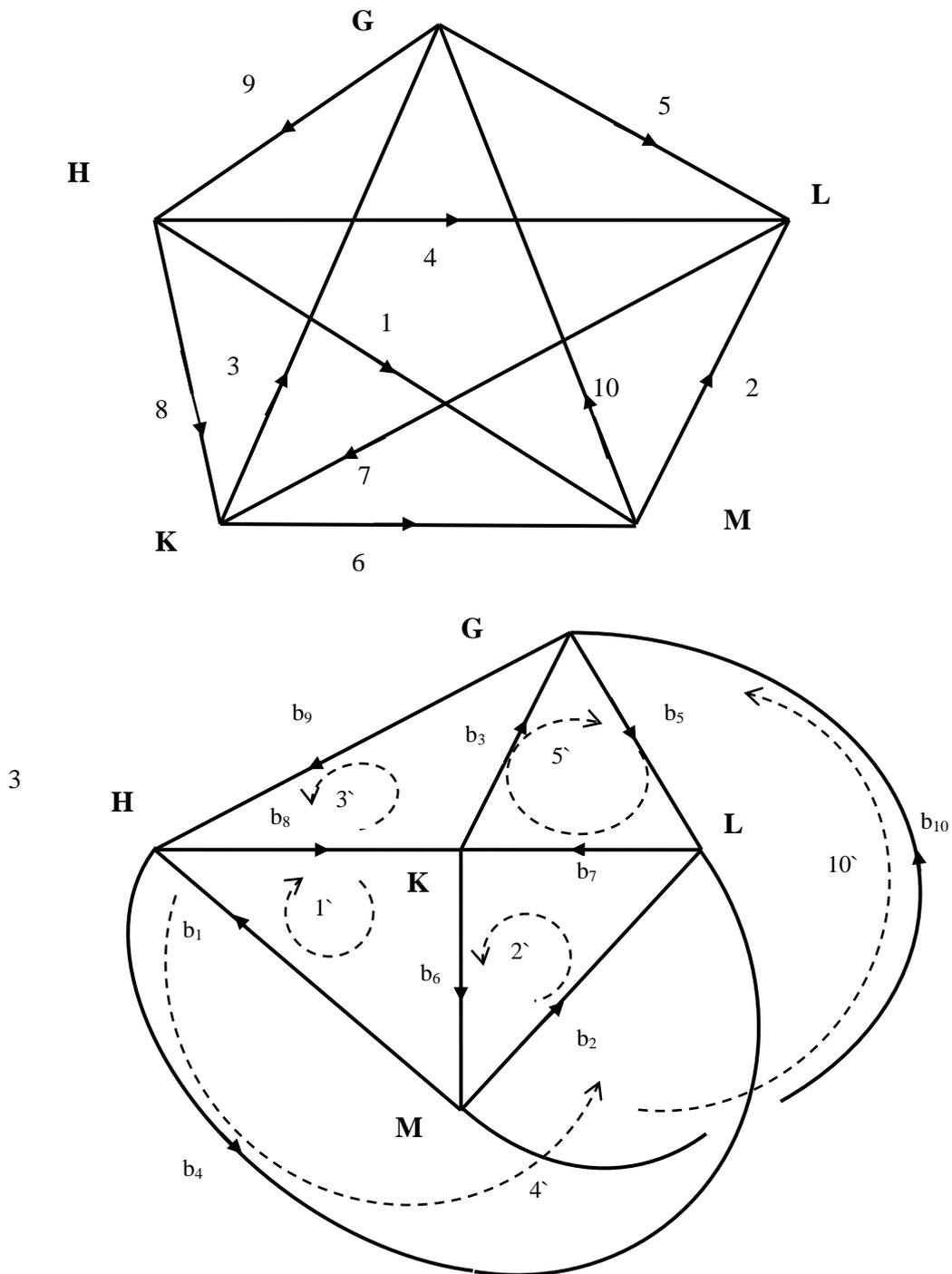
неоднозначность построения вызвана тем, что двум независимым контурам (циклам) в данном графе соответствует только один узел (вершина) в двойственном графе.

Доказано, что только два графа лежат в основе проблемы отношений между двойственностью и непланарности. Первый из них – это так называемый «двудольный» граф, обозначаемый  $K_{3,3}$ , в котором каждая из трех «верхних» вершин связана с каждой из трех «нижних» вершин. Всего такой граф содержит 9 ветвей-ребер. Второй, обозначаемый  $K_5$ , представляет собой пятиконечную звезду, связанную по периметру. Это полный граф на пяти вершинах, т.е. каждая из вершин связана со всеми остальными вершинами ребрами (ветвями). Всего здесь 10 ветвей-ребер. Следовательно, пространство одной из таких непланарных сетей имеет 9 измерений, а другой – 10 измерений.

Эти два непланарных графа, известные как графы Куратовского, [5, 1966], а именно,  $K_{3,3}$  и  $K_5$  используют для доказательства того, что непланарный граф не имеет двойственного графа. Сначала доказывают, что для этих графов двойственные графы не существуют, а затем доказывают, что *любой непланарный граф содержит либо  $K_{3,3}$ , либо  $K_5$* . Теорема Понтрягина — Куратовского формулируется так: — граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, который является подразделением  $K_5$  или  $K_{3,3}$  (иначе говоря, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу  $K_5$  или  $K_{3,3}$ ) [9, 1984, с. 142]. Если при изменении структуры сети, пусть даже очень большой, в ней, в какой-то ее части, возникает один из этих графов (или оба), то двойственная сеть перестает существовать. Однако если в процессе дальнейшего изменения структуры эти графы меняют свою конфигурацию на любую другую, то двойственная сеть восстанавливается.

Эти графы представлены, соответственно, на рис. 1 и рис. 5. Каждый из них изображен как в традиционном представлении, так и в представлении, показывающем его непланарность в явном виде.

Сначала рассмотрим свойства сети, которая может быть двойственной к непланарному графу  $K_5$ , представленному на рис. 1.



**Рис. 1. Граф  $K_5$  в традиционном представлении, и его непланарность в явном виде**

В данной сети на рис. 1 десять ветвей,  $n = 10$ , узлов  $J = 5$ , одна подсеть,  $s = 1$ , следовательно, независимых разомкнутых путей  $j = 5 - 1 = 4$ , независимых замкнутых путей, контуров  $m = n - j = 10 - 4 = 6$ .

Матрица преобразования для независимых замкнутых и разомкнутых путей сети графа  $K_5$ , показанных пунктиром на рис. 1, имеет вид,  $C =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
4	0	0	0	1	-1	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1	0	1	-1	-1	0
6	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Матрица преобразования для двойственной сети такого непланарного графа не должна существовать. Однако оказалось, что она существует, и это ортогональная матрица, которая обычно соответствует двойственной сети  $A = \underline{C} = C_i^{-1}$ , она имеет вид:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-1	-1	1	0	-1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	-1	0	-1	-1	0	1	0	0	0
8	0	1	-1	1	1	-1	0	1	0	0
9	1	1	-1	0	1	-1	0	0	1	0
10	1	1	0	0	0	-1	0	0	0	1

По этой матрице можно пытаться построить двойственную сеть, которая не должна существовать для непланарного графа. При построении возникают противоречия, но в целом структура такой сети *похожа на второй непланарный граф*. Для данной матрицы два таких варианта показаны на рис. 2. Здесь наиболее интересен второй вариант, где контуры 7 и 10 соответствуют строкам 7 и 10 матрицы  $\underline{C}$ . В строки 8 и 9 по построению входит путь через ветвь 3, которая должна иметь оба направления своей ориентации. В этом *состоит противоречие в структуре сети* и в базисе замкнутых путей. В базисе разомкнутых путей, как показано в матрице, пути 1, 2, 4, 5, 6 составляют «дерево» (остов) этого странного графа. А путь 3 включает ветви 1, 2, 4, 5, 6, и к ним ветвь 3, которая должна подключиться в узле A или в узле F, при этом второй узел должен «висеть» отдельно, иначе этот путь станет замкнутым.

В сети двойственной к сети на рис. 1, и показанной на рис. 2б, должно быть десять ветвей,  $n = 10$ , семь узлов,  $J = 7$ , одна подсеть,  $s = 1$ , следовательно, независимых разомкнутых

путей  $j = 7 - 1 = 6$ , независимых замкнутых путей, контуров  $m = n - j = 10 - 6 = 4$ . Тогда сумма независимых замкнутых и разомкнутых путей постоянна и равна числу ветвей, т.е. десять.

Либо ветвь 3 должна быть отделена от сети, как это показано справа пунктиром, но также, как диктует матрица преобразования, входить в контуры 8 и 9, которые теперь состоят из двух петель. Зато ветвей десять,  $n = 10$ , узлов  $J = 8$ , две подсети, разомкнутых путей  $j = 8 - 2 = 6$ , а контуров  $m = n - j = 10 - 6 = 4$ , т.е. требования топологии выполняются.

Оказывается, что хотя двойственный граф к непланарному графу и не существует (в наглядном представлении), но для него существует матрица преобразования, которую можно использовать, для расчета матрицы решения и потоков в сети. А, следовательно, использовать эту матрицу и соответствующий алгоритм для расчета компонент вектора потока энергии (воздействий и откликов) на ветвях сети с такой неизвестной, скрытой структурой.

Чтобы понять, как работает эта противоречивая топология, похожая по структуре на второй непланарный граф  $K_{3,3}$ , произведём расчет сети, как электрической цепи, при заданных источниках, рассмотрим, как распределены токи и напряжения в ветвях. Формально это можно сделать, поскольку есть матрица  $\underline{C}$ .

*Расчет сети (цепи) тензорным методом.*

Расчет как контурной, так и узловой сети сделаем по формулам тензорного анализа сетей, которые рассмотрены, например, в [10–12, 30–31]. Напомним формулы расчета сети тензорным методом с помощью матриц преобразования. Токи в независимых контурах связанной сети  $i^{\beta^{\wedge}}$  выражаются через токи в свободных ветвях  $i^{\beta}$  по формуле:

$$i^{\beta^{\wedge}} = (C_{\beta^{\wedge}})^{-1}_t i^{\beta}. \quad (1)$$

Формулу преобразования напряжения получим, используя формулу преобразования тока:

$$e_{\alpha} i^{\alpha} = e_{\alpha^{\wedge}} i^{\alpha^{\wedge}} = e_{\alpha^{\wedge}} (C_{\alpha^{\wedge}})^{-1}_t i^{\alpha}.$$

Тогда расчет напряжения при переходе от свободных ветвей к связанным ветвям:

$$e_{\alpha^{\wedge}} = C_{\alpha^{\wedge}} e_{\alpha} \quad (2)$$

Формула преобразования импеданса (метрический тензор) имеет вид:

$$Z_{\alpha^{\wedge}\beta^{\wedge}} = C_{\alpha^{\wedge}}^{\alpha} Z_{\alpha\beta} C_{\beta^{\wedge}}^{\beta}_t \quad (3)$$

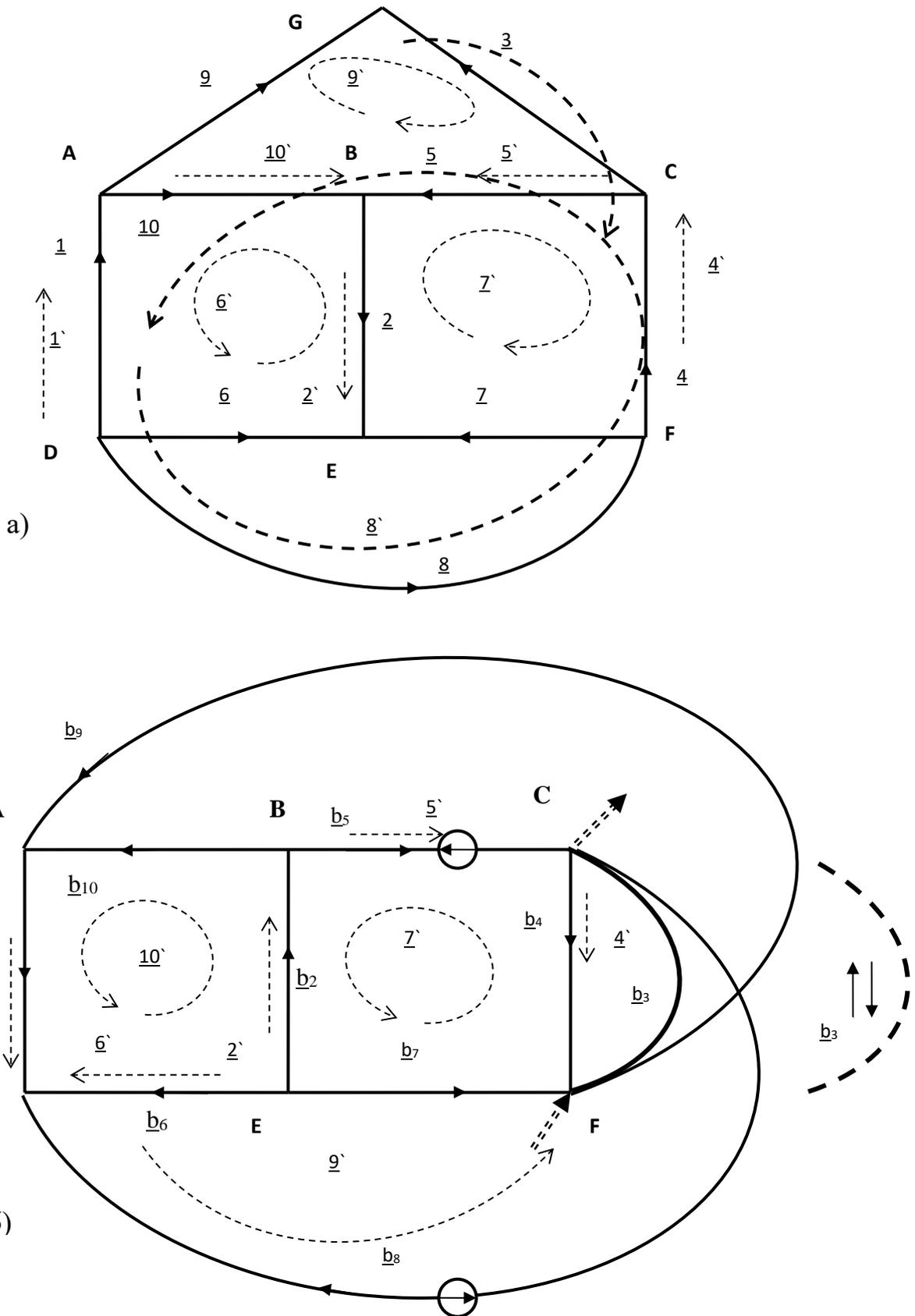


Рис. 2. Два варианта структуры сети, как бы двойственной к непланарному графу  $K_5$ , похожи по структуре на второй непланарный граф  $K_{3,3}$

*Расчет цепи для источников напряжения.* Пусть, для простоты, сопротивления ветвей, метрика, равны единицам. Заданы источники напряжения (ЭДС)  $e_\alpha$ , и матрица импедансов свободных ветвей  $Z_{\alpha\beta} = I$ , где  $I$  – единичная матрица. Надо найти токи в ветвях связанной цепи. В сети замкнутых свободных ветвей, где количество переменных совпадает с числом ветвей, расчет по формуле:  $i^\beta = (Z_{\alpha\beta})^{-1} e_\alpha$ . В связанной сети число независимых контуров, вообще говоря, меньше числа ветвей. Получив матрицу преобразования путей, можно от заданных  $Z_{\alpha\beta}$  и  $e_\alpha$  в простейшей сети перейти к величинам базиса путей в связанной сети с помощью формул (2) и (3). Затем по уравнению поведения связанной цепи получить токи в базисных замкнутых путях. Т.е. из  $e_\alpha = Z_{\alpha\beta} i^{\beta^*}$  получим  $i^{\beta^*} = (Z_{\alpha\beta})^{-1} e_\alpha$  и подставим сюда (2) и (3). Получим:

$$i^{\beta^*} = ({}^m C_{\alpha^*}{}^\alpha Z_{\alpha\beta} {}^m C_{\beta^*}{}^\beta)^{-1} {}^m C_{\alpha^*}{}^\alpha e_\alpha \quad (4)$$

Индекс  $m$  означает, что используется та часть матрицы преобразования, которая представляет замкнутые пути, базисные контуры в связанной цепи.

Токи в контурах представляют компоненты в базисных путях. По формуле (1) перейдем к измеримым величинам токов в ветвях связанной цепи, которые обозначим  $i^\beta_c$ . Тогда получим расчет откликов (токов) в ветвях по исходным источникам  $e_\alpha$ .

$$i^\beta_c = {}^m C_{\alpha^*}{}^\alpha i^{\beta^*} = {}^m C_{\alpha^*}{}^\alpha ({}^m C_{\alpha^*}{}^\alpha Z_{\alpha\beta} {}^m C_{\beta^*}{}^\beta)^{-1} {}^m C_{\alpha^*}{}^\alpha e_\alpha = Y_c e_\alpha \quad (5)$$

Выражение перед вектором  $e_\alpha$  обозначим  $Y_c$  и назовем *матрицей решения*, умножение которой на  $e_\alpha$  сразу дает отклики в ветвях  $i^\beta_c$ . Отсюда получим напряжения на ветвях,  $e^c_\alpha$ .

$$e^c_\alpha = Z_{\alpha\beta} i^\beta_c = Z_{\alpha\beta} {}^m C_{\alpha^*}{}^\alpha ({}^m C_{\alpha^*}{}^\alpha Z_{\alpha\beta} {}^m C_{\beta^*}{}^\beta)^{-1} {}^m C_{\alpha^*}{}^\alpha e_\alpha = Z_{\alpha\beta} Y_c e_\alpha \quad (6)$$

Проведем расчеты для сети графа  $K_5$ , и двойственной сети, получим матрицы решения, которые умножим на вектор источников получим токи в ветвях.

Для сети графа  $K_5$  матрица решения, источники и отклики имеют вид  $Y_c e_\alpha = i^\beta_c$ :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
1	3	-1	0	1	0	1	0	1	-1	-1	1/5	*	1	=	1	1/5
2	-1	3	0	-1	-1	1	1	0	0	-1			2		4	
3	0	0	3	0	1	-1	1	1	1	-1			0		1	
4	1	-1	0	3	-1	0	1	-1	1	0			0		-2	
5	0	-1	1	-1	3	0	1	0	-1	1			1		1	
6	1	1	-1	0	0	3	1	1	0	1			0		3	
7	0	1	1	1	1	1	3	-1	0	0			0		3	
8	1	0	1	-1	0	1	-1	3	1	0			0		1	
9	-1	0	1	1	-1	0	0	1	3	1			0		-2	
10	-1	-1	-1	0	1	1	0	0	1	3			0		-2	

Элементы матрицы и откликов, токов в сетях, надо разделить на значение определителя, который в данном случае равен 5. Поскольку сопротивления ветвей равны единицам, то напряжения на ветвях численно равны токам в ветвях.

Для сети, которая должна быть двойственной к графу  $K_5$ , также получим отклики, умножая матрицу решений на вектор воздействий:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		$e_\alpha$	$i^\beta_c$		
1	2	1	0	-1	0	-1	0	-1	1	1	1	1	1	4	
2	1	2	0	1	1	-1	-1	0	0	1	2	2	2	6	
3	0	0	2	0	-1	1	-1	-1	-1	1	3	0	3	-1	
4	-1	1	0	2	1	0	-1	1	-1	0	4	0	4	2	
5	0	1	-1	1	2	0	-1	0	1	-1	5	1	5	4	
6	-1	-1	1	0	0	2	-1	-1	0	-1	5 * 6	0	6	-3	5
7	0	-1	-1	-1	-1	-1	2	1	0	0	7	0	7	-3	
8	-1	0	-1	1	0	-1	1	2	-1	0	8	0	8	-1	
9	1	0	-1	-1	1	0	0	-1	2	-1	9	0	9	2	
10`	1	1	1	0	-1	-1	0	0	-1	2	10`	0	10`	2	

Элементы матрицы и откликов, токов в сетях, также надо разделить на значение определителя, который в данном случае равен 5. Поскольку сопротивления ветвей равны единицам, то напряжения на ветвях численно равны токам в ветвях.

Нетрудно проверить, что эти матрицы решения подчиняются, как и положено, инварианту двойственности, т.е. их сумма равна единичной матрице.

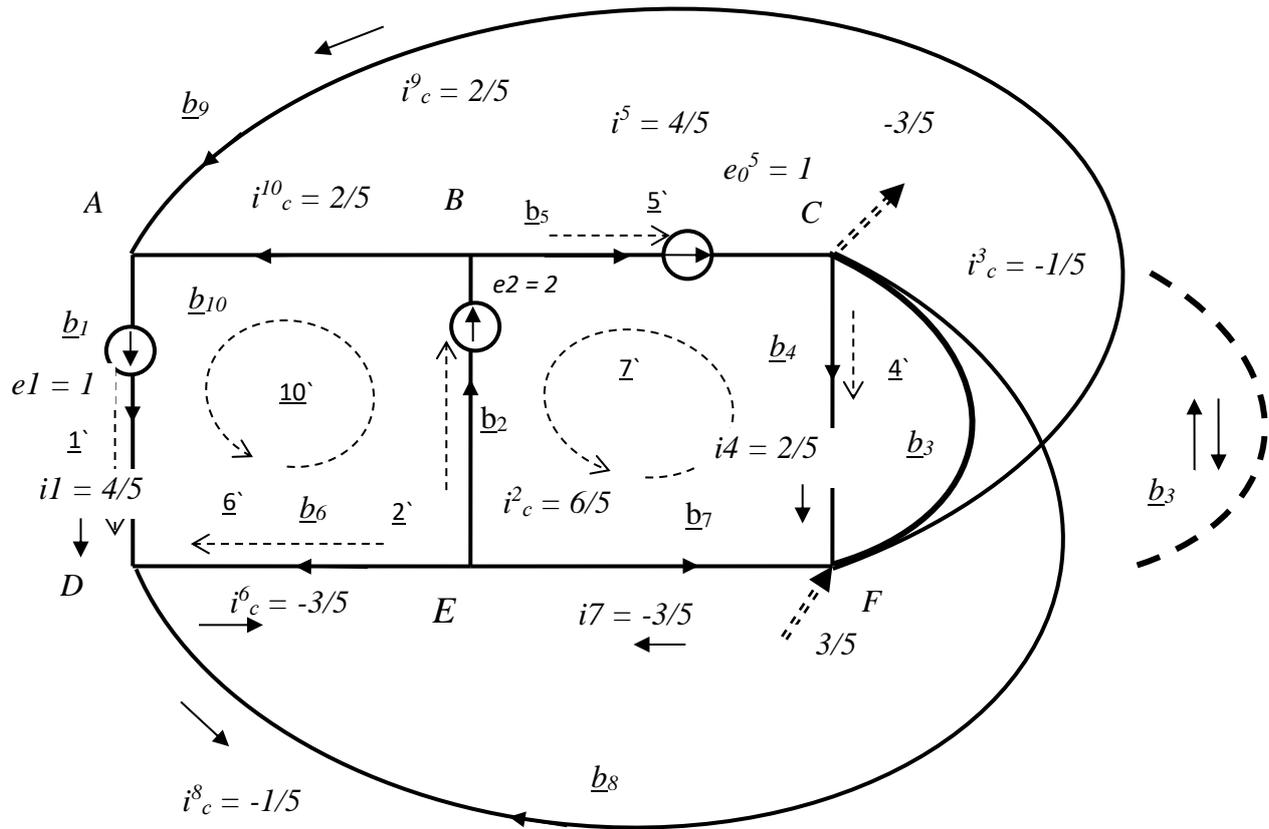


Рис. 3. Отклики и воздействия в контурной сети, как бы двойственной к графу  $K_5$

Токи и напряжения в ветвях должны подчиняться законам Кирхгофа, что и является проверкой правильности решения. Для исходной сети непланарного графа легко проверить по сети на рис. 1, что сумма токов в узлах равна нулю, и сумма напряжений по каждому контуру равна нулю, т.е. законы Кирхгофа выполняются, расчет сделан правильно.

Проведем проверку законов Кирхгофа для второй сети, которая соответствует ортогональной матрице преобразования, и является попыткой стать двойственной сетью для непланарного графа. Значения откликов для этой сети показаны на рис. 3. Первый закон: сумма токов в узлах равна нулю. Токи, входящие в узел, со знаком плюс, выходящие – со знаком минус. Для двойственной сети непланарного графа на рис. 3 имеем, что  $\sum m_i c^\alpha = 0$ :

$$\text{узел A: } -m_i c^1 + m_i c^9 + m_i c^{10} = (-4 + 2 + 2)/5 = 0;$$

$$\text{узел B: } +m_i c^2 - m_i c^5 - m_i c^{10} = (+6 - 4 - 2)/5 = 0;$$

$$\text{узел C: } -m_i c^3 - m_i c^4 + m_i c^5 - m_i c^8 = (-1 - 2 + 4 + 1)/5 = +2/5; \text{ если ветвь три, } b_3, \text{ входит в C;}$$

$$\text{узел C: } +m_i c^3 - m_i c^4 + m_i c^5 - m_i c^8 = (+1 - 2 + 4 + 1)/5 = +4/5; \text{ если ветвь три выходит из C;}$$

$$\text{узел C: } -m_i c^4 + m_i c^5 - m_i c^8 = (-2 + 4 + 1)/5 = +3/5; \text{ если ветвь три, } b_3, \text{ вне сети;}$$

$$\text{узел D: } +m_i c^1 + m_i c^6 + m_i c^8 = (+4 - 3 - 1)/5 = 0;$$

$$\text{узел } E: -m_i^2 - m_i^6 - m_i^7 = (-6 + 3 + 3)/5 = 0;$$

$$\text{узел } F: +m_i^3 + m_i^4 + m_i^7 - m_i^9 = (-1 + 2 - 3 - 2)/5 = -2/5; \text{ если ветвь три выходит из } F;$$

$$\text{узел } F: -m_i^3 + m_i^4 + m_i^7 - m_i^9 = (+1 + 2 - 3 - 2)/5 = -4/5; \text{ если ветвь три, } b_3, \text{ входит в } F;$$

$$\text{узел } F: +m_i^4 + m_i^7 - m_i^9 = (+2 - 3 - 2)/5 = -3/5; \text{ если ветвь три, } b_3, \text{ вне сети};$$

Топологически ветвь 3 должна быть отделена от сети, составлять отдельную подсеть.

Можно допустить, что ветвь 3 выходит из узла  $C$  и входит в  $F$ , либо наоборот. Это диктует состав контуров, баланс напряжений в которых рассмотрен ниже. Во всех случаях в узлах  $C$  и  $F$  закон Кирхгофа не выполняется. Значения дисбаланса токов показывают, что часть тока уходит из узла  $C$  и приходит в узел  $F$ , как будто существует невидимое дополнение к этой сети. Эти внешние токи показаны на рисунке двойным пунктиром.

Второй закон Кирхгофа: сумма напряжений в ветвях,  ${}^m e^c_\alpha$ , равна сумме воздействий (источников напряжения)  ${}^m e^0_\alpha$  в каждом контуре. Знаки определяются ориентацией напряжений на ветвях относительно направления контура. Для сети на рис. 3 это равенство имеет вид:  $\Sigma {}^m e^c_\alpha = \Sigma {}^m e^0_\alpha$ . Баланс напряжений в контурах получим следующий:

- контур 7:  $-{}^m e^c_2 - {}^m e^c_4 - {}^m e^c_5 + {}^m e^c_7 = (-6 - 2 - 4 - 3)/5 = -15/5 = -3 = -{}^m e^0_2 - {}^m e^0_5$ ;
- контур 8:  $+{}^m e^c_2 - {}^m e^c_3 + {}^m e^c_4 + {}^m e^c_5 - {}^m e^c_6 + {}^m e^c_8 = (+6 + 1 + 2 + 4 + 3 - 1)/5 = +15/5 = +{}^m e^0_2 + {}^m e^0_5 = +2 + 1 = 3$ ;
- контур 9:  $+{}^m e^c_1 + {}^m e^c_2 - {}^m e^c_3 + {}^m e^c_5 - {}^m e^c_6 + {}^m e^c_9 = (4 + 6 + 1 + 4 + 3 + 2)/5 = 20/5 = 4 = +{}^m e^0_1 + {}^m e^0_2 + {}^m e^0_5 = 1 + 2 + 1 = 4$ ;
- контур 10:  $+{}^m e^c_1 + {}^m e^c_2 - {}^m e^c_6 + {}^m e^c_{10} = (+4 + 6 + 3 + 2)/5 = 15/5 = {}^m e^0_1 + {}^m e^0_2 = 3$ .

Таким образом, во всех контурах закон Кирхгофа выполняется, при условии, что ветвь три,  $b_3$ , входит в эти контуры со своим знаком, *хотя она должна быть вне сети*.

Рассмотрим токи и напряжения в узловой сети при источниках тока, которые численно равны источникам напряжения в предыдущем примере. В силу инварианта двойственности, матрица решения узловой двойственной сети равна матрице решения данной контурной сети для непланарного графа, которая представлена в (7). Там же отклики в данной контурной сети численно равны откликам в узловой двойственной сети, если сопротивления ветвей равны 1.

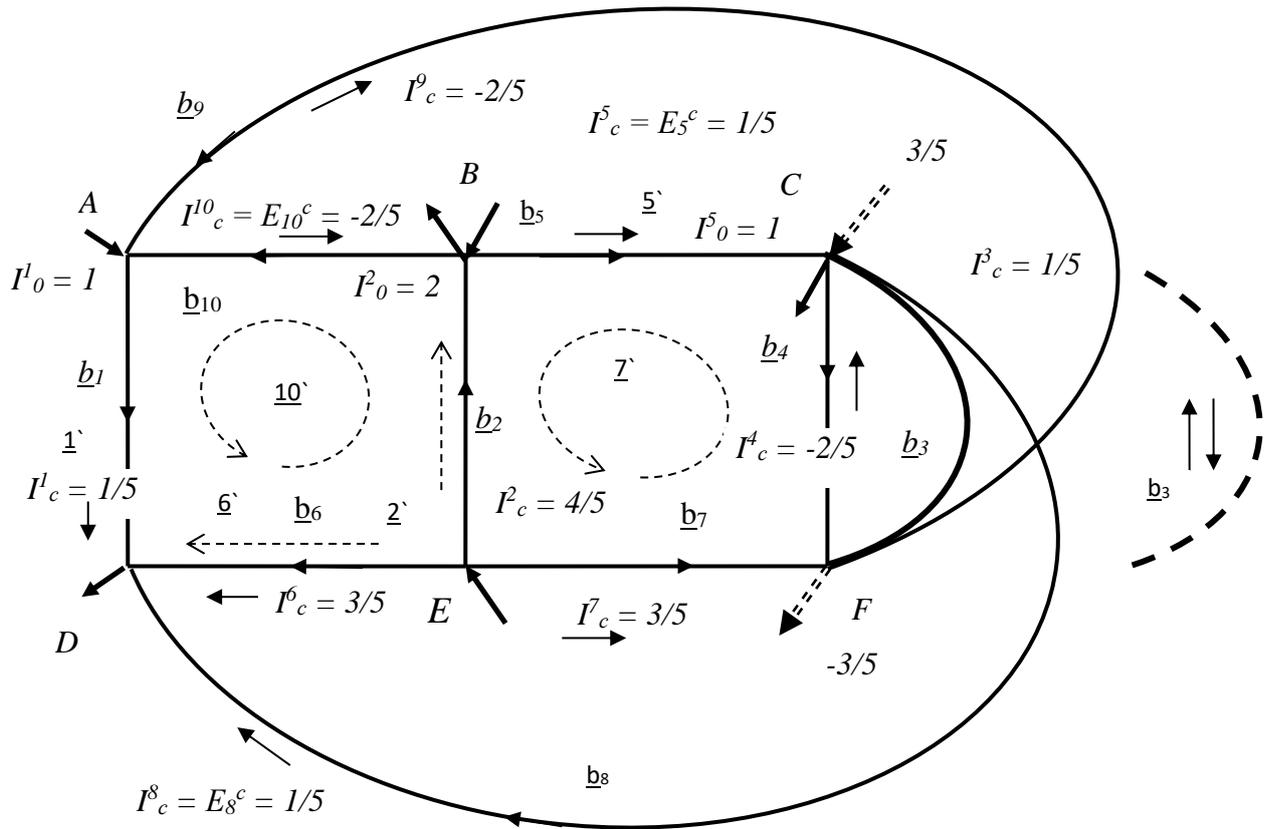


Рис. 4. Отклики и воздействия в узловой сети, как бы двойственной к графу  $K_5$

Токи и напряжения в ветвях должны подчиняться законам Кирхгофа; это является проверкой правильности решения. Для исходной сети непланарного графа  $K_5$  легко проверить по сети на рис. 1, что сумма токов в узлах равна нулю, и сумма напряжений по каждому контуру равна нулю, т.е. законы Кирхгофа выполняются, расчет сделан правильно.

Проведем проверку законов Кирхгофа для узловой сети, которая соответствует ортогональной матрице преобразования, и является попыткой стать двойственной сетью для непланарного графа. Значения откликов для этой сети показаны на рис. 4. Первый закон: сумма токов в узлах равна нулю, с учетом источников тока. Токи, входящие в узел, со знаком плюс, выходящие – со знаком минус. Для двойственной сети непланарного графа на рис. 4 имеем, что  $\sum^j I_c^\alpha = 0$ :

$$\text{узел A: } -jI_c^1 - jI_c^9 - jI_c^{10} + I_c^0 = (-1 - 2 - 2)/5 + 1 = 0 \text{ – выполняется;}$$

$$\text{узел B: } +jI_c^2 - jI_c^5 - jI_c^{10} = (+4 - 1 + 2)/5 = 5/5 = 1; + I_c^0 - I_c^5 = 2 - 1 = 1 \text{ – выполняется;}$$

$$\text{узел C: } +jI_c^3 - jI_c^4 + jI_c^5 - jI_c^8 - I_c^0 = (+1 + 2 + 1 - 1)/5 - 1 = -2/5; \text{ если ветвь } b_3 \text{ входит в C;}$$

$$\text{узел C: } -jI_c^3 - jI_c^4 + jI_c^5 - jI_c^8 - I_c^0 = (-1 + 2 + 1 - 1)/5 - 1 = -4/5; \text{ если } b_3 \text{ выходит из C;}$$

$$\text{узел C: } -jI_c^4 + jI_c^5 - jI_c^8 - I_c^0 = (+2 + 1 - 1)/5 - 1 = -3/5; \text{ если ветвь } b_3 \text{ вне сети;}$$

$$\text{узел D: } +jI_c^1 + jI_c^6 + jI_c^8 - I_c^0 = (+1 + 3 + 1)/5 - 1 = 0 \text{ – выполняется;}$$

узел  $E$ :  $-jI_c^2 - jI_c^6 - jI_c^7 + I^2_0 = (-4 - 3 - 3)/5 + 2 = 0$  – выполняется;

узел  $F$ :  $-jI_c^3 + jI_c^4 + jI_c^7 - jI_c^9 = (-1 - 2 + 3 + 2)/5 = +2/5$ ; если ветвь три выходит из  $F$ ;

узел  $F$ :  $+jI_c^3 + jI_c^4 + jI_c^7 - jI_c^9 = (+1 - 2 + 3 + 2)/5 = +4/5$ ; если ветвь  $b_3$  входит в  $F$ ;

узел  $F$ :  $+jI_c^4 + jI_c^7 - jI_c^9 = (-2 + 3 + 2)/5 = +3/5$ ; если ветвь  $b_3$  вне сети;

Топологически ветвь  $b_3$  должна быть отделена от сети, как отдельная подсеть. Можно допустить, что эта ветвь выходит из узла  $C$  и входит в  $F$ , либо наоборот. Это диктует баланс напряжений в контурах. Также, как и в контурной сети, в узлах  $C$  и  $F$  закон Кирхгофа не выполняется. Значения дисбаланса токов показывают, что часть тока из узла  $C$  уходит, а в узел  $F$  приходит (в контурной сети наоборот), как будто существует невидимое дополнение к этой сети. Эти внешние токи показаны на рисунке двойным пунктиром.

Второй закон Кирхгофа: сумма напряжений в ветвях,  ${}^m e^c_\alpha$ , равна сумме воздействий (источников напряжения)  ${}^m e^0_\alpha$  в каждом контуре. Знаки определяются ориентацией напряжений на ветвях относительно направления контура. Для сети на рис. 4 это равенство имеет вид:  $\Sigma {}^m e^c_\alpha = \Sigma {}^m e^0_\alpha$ . Баланс напряжений в контурах получим следующий:

- контур 7:  $-jE^c_2 - jE^c_4 - jE^c_5 + jE^c_7 = (-4 + 2 - 1 + 3)/5 = 0$ ;
- контур 8:  $+jE^c_2 - jE^c_3 + jE^c_4 + jE^c_5 - jE^c_6 + jE^c_8 = (+4 - 1 - 2 + 1 - 3 + 1)/5 = 6 - 6 = 0$ ;
- контур 9:  $+jE^c_1 + jE^c_2 - jE^c_3 + jE^c_5 - jE^c_6 + jE^c_9 = (1 + 4 - 1 + 1 - 3 - 2)/5 = 6 - 6 = 0$ ;
- контур 10:  $+jE^c_1 + jE^c_2 - jE^c_6 + jE^c_{10} = (+1 + 4 - 3 - 2)/5 = 0$ .

Получается, что для баланса напряжений ветвь  $b_3$  должна входить и в контур 8, и в контур 9. При этом топологически ветвь  $b_3$  должна быть вне сети. Т.е. токи в контурах должны «перескакивать» в эту ветвь, тогда закон Кирхгофа выполняется.

Таким образом, для двойственной сети непланарного графа можно рассчитать токи и напряжения в контурном и узловом варианте, т.е. при внутренних и внешних воздействиях. Это указывает на то, что какая-то сеть существует. Однако баланс токов и напряжений в этой сети, похожей на второй непланарный граф  $K_{3,3}$ , имеет некие скрытые связи, которые в данной структуре отобразить нельзя.

Можно также найти мощность, которая дополняет до полного инвариантного значения соответствующую величину вектора в сети, содержащей в своей структуре непланарный граф. Таким образом, все двойственные закономерности и инварианты продолжают выполняться и при возникновении непланарности, хотя наглядно представить при этом структуру двойственной сети в явном виде пока невозможно. Разрешение этого противоречия должно оказаться в чем-то другом, возможно, связанном с многомерными сетями.

Граф  $K_{3,3}$  Рассмотрим свойства сети, двойственной ко второму непланарному графу  $K_{3,3}$ .

Граф  $K_{3,3}$  представлен на рис. 5, где он изображен как в традиционном представлении, так и в представлении, показывающем его непланарность в явном виде.

В сети графа  $K_{3,3}$  на рис. 5 девять ветвей,  $n = 9$ , узлов  $J = 6$ , одна подсеть,  $s = 1$ , следовательно, независимых разомкнутых путей  $j = 6 - 1 = 5$ , независимых замкнутых путей, контуров  $m = n - j = 9 - 5 = 4$ .

Матрица преобразования для независимых замкнутых и разомкнутых путей сети графа  $K_5$ , показанных пунктиром на рис. 5, имеет вид,  $C(K_{3,3}) =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$1^*$	1	1	1	0	0	-1	0	0	0	$m$
$2^*$	0	1	0	1	1	0	-1	0	0	$m$
$3^*$	0	0	1	-1	-1	0	0	0	-1	$m$
$4^*$	0	0	0	1	0	1	-1	-1	0	$m$
$C = 5^*$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$j$
$6^*$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	$j$
$7^*$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$j$
$8^*$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$j$
$9^*$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$j$

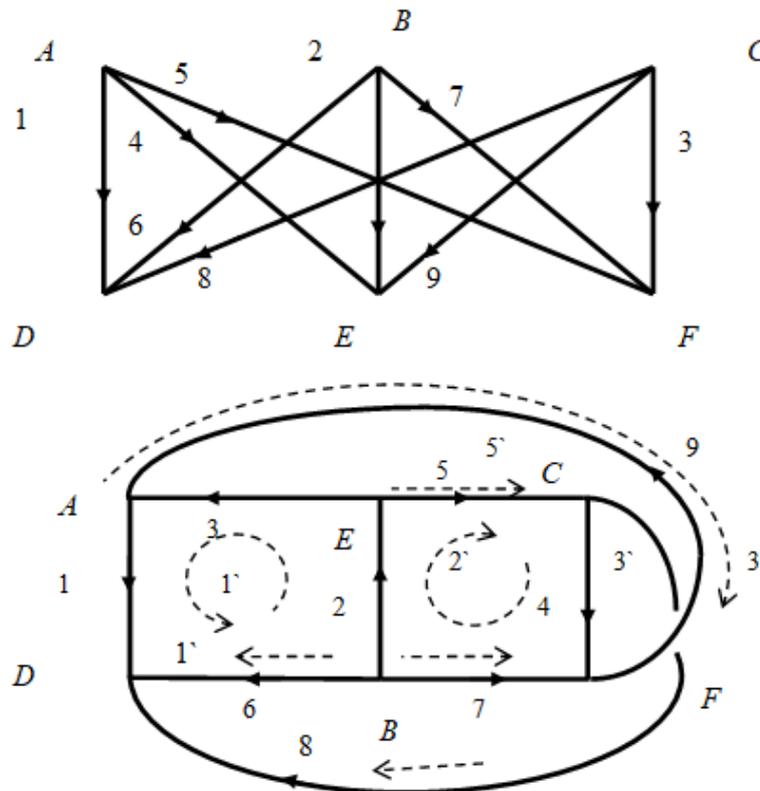


Рис. 5. Граф  $K_{3,3}$  в традиционном представлении, и в представлении, демонстрирующем его непланарность

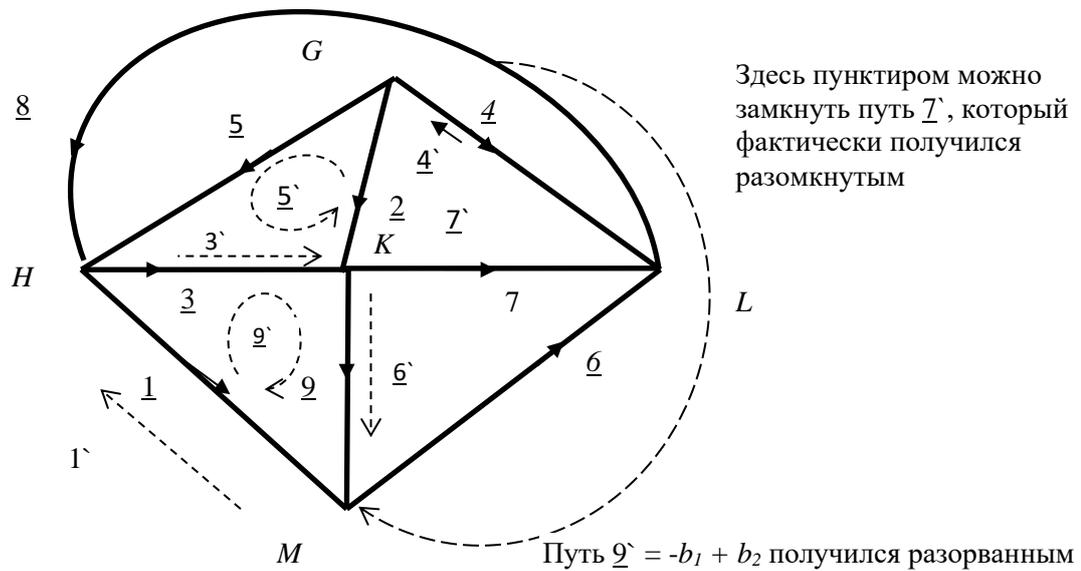
Матрица преобразования для двойственной сети такого непланарного графа не должна существовать. Однако оказалось, что она существует, и это ортогональная матрица, которая обычно соответствует двойственной сети  $A = \underline{C} = C_t^{-1}$ , она имеет вид:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$\underline{1}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$j$
$\underline{2}$	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	$j$
$\underline{3}$	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	$j$
$\underline{4}$	0	-1	1	1	0	0	0	0	0	$j$
$\underline{5}$	0	-1	1	0	1	0	0	0	0	$m$
$\underline{6}$	1	1	-1	-1	0	1	0	0	0	$m$
$\underline{7}$	-1	0	1	1	0	0	1	0	0	$m$
$\underline{8}$	0	-1	1	1	0	0	0	1	0	$m$
$\underline{9}$	-1	0	1	0	0	0	0	0	1	$m$

По этой матрице можно пытаться построить двойственную сеть, которая не должна существовать для непланарного графа. При построении возникают противоречия, но в целом структура такой сети *похожа на второй непланарный граф*. Для данной матрицы два таких варианта показаны на рис. 6.

Для построения структуры сети используем строки  $\underline{5}$ – $\underline{9}$ , которые соответствуют контурам, замкнутым путям. Например, путь  $\underline{5}$  показывает, что ветви  $\underline{2}$ ,  $\underline{3}$  и  $\underline{5}$  должны образовать замкнутый треугольник, в котором ветвь  $\underline{2}$  ориентирована противоположно ветвям  $\underline{3}$  и  $\underline{5}$ . Аналогично соединяются ветви по остальным путям, каждый из которых должен добавлять хотя бы одну новую ветвь к уже охваченным ветвям. Признаком базиса замкнутых путей является то, что каждая ветвь вошла хотя бы в один контур. Разомкнутые пути описывают открытую часть сети, т.е. узлы, через которые происходит взаимодействие с внешним миром. Например, путь  $\underline{1}$  соединяет узлы  $H$  и  $M$ . Каждый следующий разомкнутый путь добавляет хотя бы один узел. Признаком базиса здесь является то, что каждый узел вошел хотя бы в один разомкнутый путь.

Построенная по этой матрице соответствующая сеть представлена на рис. 6.



**Рис. 6. Граф, который соответствует ортогональной матрице к матрице путей графа  $K_{3,3}$  похож на граф  $K_5$ , но ему не хватает одной ветви для замыкания пути  $\underline{1}$**

Можно заметить, что хотя для этой сети, граф (структура) которой не должна существовать, матрица преобразования существует и имеет вполне определенный вид. Строки в этой матрице перечисляют ветви, входящие в независимые замкнутые и разомкнутые (базисные) пути двойственной сети. Соединяя ветви в той последовательности и с той ориентацией, которая указана в строках ортогональной матрицы преобразования, можно попытаться построить структуру двойственной сети в явном виде. Сеть, которая показана на рис. 6, построена так, как указывает состав ветвей в путях этой матрицы. Граф этой сети, которая соответствует ортогональной матрице к матрице путей графа  $K_{3,3}$  похож на граф  $K_5$ .

*Противоречия состоят в том, что* для замыкания пути  $\underline{1}$  не хватает одной ветви. Дело в том, что один замкнутый путь, в соответствии с ортогональной матрицей преобразования (а она, как известно, является единственной), оказался разомкнутым. Этот путь  $\underline{1}$  состоит из ветвей  $\underline{1}$ ,  $\underline{3}$ ,  $\underline{4}$  и  $\underline{7}$ . Для того чтобы он стал замкнутым, нужна еще одна ветвь, которая бы замыкала узлы  $G$  и  $M$ . Если такую ветвь добавить, то, как нетрудно видеть, двойственная сеть к графу  $K_{3,3}$  превратится в сеть, которая соответствует графу  $K_5$ . Эта недостающая для замыкания пути  $\underline{1}$  ветвь показана пунктиром в правой части рисунка. Кроме того, ветвь  $\underline{4}$  в путях  $\underline{6}$  и  $\underline{7}$  должна иметь разные ориентации.

В сети двойственной к сети на рис. 5, и показанной на рис. 6, должно быть девять ветвей,  $n = 9$ , пять узлов,  $J = 5$ , одна подсеть,  $s = 1$ , следовательно, независимых разомкнутых путей имеем  $j = J - s = 5 - 1 = 4$ , независимых замкнутых путей, контуров  $m = n - j = 9 - 4 =$

5. Тогда сумма независимых замкнутых и разомкнутых путей постоянна и равна числу ветвей, т.е. девять. Таким образом, требования двойственности сетей выполняются.

Хотя двойственный граф к непланарному графу и не существует (в наглядном представлении), но для него существует матрица преобразования, которую можно использовать, для расчета матрицы решения и потоков в сети. А, следовательно, использовать эту матрицу и соответствующий алгоритм для расчета компонент вектора потока энергии (воздействий и откликов) на ветвях сети с такой неизвестной, скрытой структурой.

Проведем расчеты для сети графа  $K_{3,3}$ , и двойственной сети по формулам 1-6, получим матрицы решения, которые умножим на вектор источников получим токи в ветвях.

Для сети графа  $K_{3,3}$  матрица решения, источники и отклики имеют вид  $Y_c e_\alpha = i^\beta_c$ :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9		$e_\alpha$	$i^\beta_c$		
1	4,0	1,0	2,0	1,0	-1,0	-2,0	1,0	-2,0	2,0	1	1	1	5	
2	1,0	4,0	2,0	1,0	2,0	-2,0	-2,0	1,0	-1,0	2	2	2	11	
3	2,0	2,0	4,0	-1,0	-2,0	-1,0	-1,0	-1,0	-2,0	3	0	3	4	
4	1,0	1,0	-1,0	4,0	2,0	1,0	-2,0	-2,0	2,0	4	0	4	5	
5	-1,0	2,0	-2,0	2,0	4,0	-1,0	-1,0	2,0	1,0	1/9 * 5	1	= 5	7	1/9
6	-2,0	-2,0	-1,0	1,0	-1,0	4,0	-2,0	-2,0	-1,0	6	0	6	-7	
7	1,0	-2,0	-1,0	-2,0	-1,0	-2,0	4,0	1,0	2,0	7	0	7	-4	
8	-2,0	1,0	-1,0	-2,0	2,0	-2,0	1,0	4,0	-1,0	8	0	8	2	
9	2,0	-1,0	-2,0	2,0	1,0	-1,0	2,0	-1,0	4,0	9	0	9	1	

Элементы матрицы и откликов, токов в ветвях, надо разделить на значение определителя, который в данном случае равен 9. Поскольку сопротивления ветвей равны единицам, то напряжения на ветвях численно равны токам в ветвях.

Для сети, которая должна быть двойственной к графу  $K_{3,3}$ , также можем получить отклики, умножая матрицу решений на вектор воздействий. Можно использовать инвариант двойственности, и получить отклики, как в узловой сети, так и в контурной двойственной сети по формуле  $\underline{i}^\beta_c = \underline{i}^{\beta_0} - i^\beta_c =$

$$\underline{i}^\beta_c = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 7 & -4 & -5 & 2 & 7 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} & 1/9 \end{matrix}$$

Элементы матрицы и откликов, токов в сетях, также надо разделить на значение определителя, который в данном случае равен 9. Поскольку сопротивления ветвей равны единицам, то напряжения на ветвях численно равны токам в ветвях.

Токи и напряжения в ветвях должны подчиняться законам Кирхгофа, что и является проверкой правильности решения. Для исходной сети непланарного графа легко проверить по

сети на рис. 6, что сумма токов в узлах равна нулю, и сумма напряжений по каждому контуру равна нулю, т.е. законы Кирхгофа выполняются, расчет сделан правильно.

Проведем проверку законов Кирхгофа для второй сети, которая соответствует ортогональной матрице преобразования, и является попыткой стать двойственной сетью для непланарного графа. Значения для этой сети откликов (численно равных друг другу токов и напряжений) показаны на рис. 7. Первый закон Кирхгофа состоит в том, что сумма токов в узлах равна нулю.

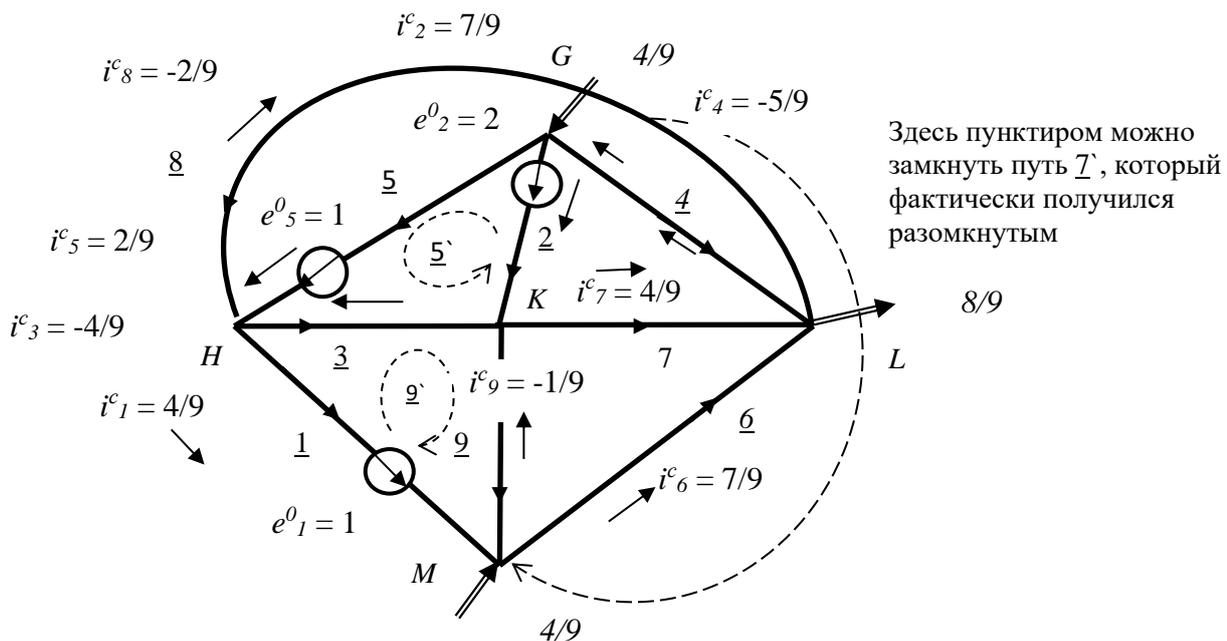


Рис. 7. Отклики, токи и напряжения, а также воздействия в контурной сети, как бы двойственной к графу  $K_{3,3}$

Токи, входящие в узел, со знаком плюс, выходящие – со знаком минус. Для двойственной сети непланарного графа на рис. 7 имеем, что  $\Sigma^m i_c^\alpha = 0$ :

$$\text{узел } G: -m_{i_c^2} - m_{i_c^4} - m_{i_c^5} = (-7 - 2 + 5)/9 = -4/9;$$

$$\text{узел } H: -m_{i_c^1} - m_{i_c^3} + m_{i_c^5} + m_{i_c^8} = (-4 + 4 + 2 - 2)/9 = 0;$$

$$\text{узел } K: +m_{i_c^2} + m_{i_c^3} - m_{i_c^7} - m_{i_c^9} = (-4 + 7 + 1 - 4)/9 = 0;$$

$$\text{узел } L: +m_{i_c^4} + m_{i_c^6} + m_{i_c^7} - m_{i_c^8} = (-5 + 4 + 7 + 2)/9 = +8/9;$$

$$\text{узел } M: +m_{i_c^1} - m_{i_c^6} + m_{i_c^9} = (+4 - 1 - 7)/9 = -4/9.$$

В узлах  $G$ ,  $L$  и  $M$  закон Кирхгофа не выполняется. Значения дисбаланса токов показывают, что часть тока уходит из узла  $L$  и приходит в узлы  $G$  и  $M$ , как будто существует невидимое дополнение к этой сети. Причем ток из узла  $L$  равен сумме токов, входящих в узлы  $G$  и  $M$ . Эти внешние токи показаны на рисунке двойным пунктиром.

Второй закон Кирхгоффа: сумма напряжений в ветвях,  ${}^m e^c_\alpha$ , равна сумме воздействий (источников напряжения)  ${}^m e^0_\alpha$  в каждом контуре. Знаки определяются ориентацией напряжений на ветвях относительно направления контура. Для сети на рис. 7 это равенство имеет вид:  $\Sigma {}^m e^c_\alpha = \Sigma {}^m e^0_\alpha$ . Баланс напряжений в контурах получим следующий:

- контур 5̂:  $-{}^m e^c_2 + {}^m e^c_3 + {}^m e^c_5 = (-7 - 4 + 2)/9 = -9/9 = {}^m e^0_5 = 1$ .
- контур 6̂:  $+{}^m e^c_1 + {}^m e^c_2 - {}^m e^c_3 - {}^m e^c_4 + {}^m e^c_6 = (+4 + 7 + 4 + 5 + 7)/9 = 27/9 = {}^m e^0_1 + {}^m e^0_2 = 3$ .
- контур 7̂:  $-{}^m e^c_1 + {}^m e^c_3 + {}^m e^c_4 + {}^m e^c_7 = (-4 - 4 - 5 + 4)/9 = -9/9 = -{}^m e^0_1 = 1$ ;
- контур 8̂:  $-{}^m e^c_2 + {}^m e^c_3 + {}^m e^c_4 + {}^m e^c_8 = (-7 - 4 - 5 - 2)/9 = +18/9 = +{}^m e^0_2 = +2$ ;
- контур 9̂:  $-{}^m e^c_1 + {}^m e^c_3 + {}^m e^c_9 = (-4 - 4 - 1)/9 = -9/9 = -1 = +{}^m e^0_1 = 1$ .

Таким образом, во всех контурах закон Кирхгоффа выполняется.

Рассмотрим токи и напряжения в узловой сети при источниках тока, которые численно равны источникам напряжения в предыдущем примере. В силу инварианта двойственности, матрица решения узловой двойственной сети равна матрице решения данной контурной сети для непланарного графа. Отклики в данной контурной сети численно равны откликам в узловой двойственной сети, если сопротивления ветвей равны 1.

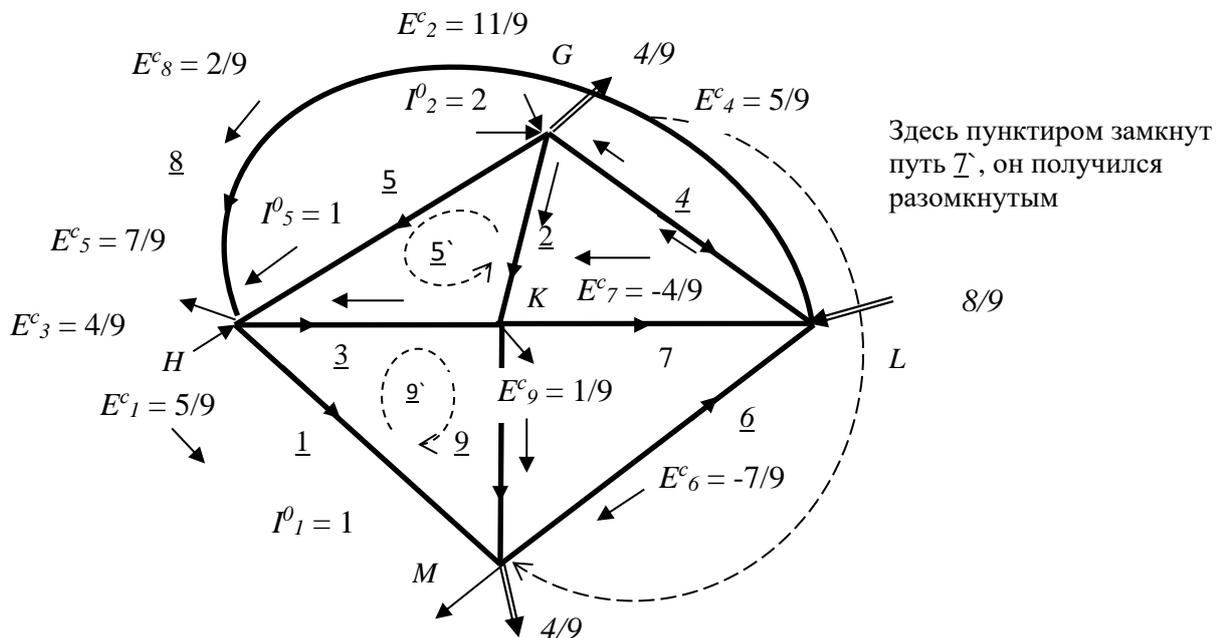


Рис. 8. Отклики (токи и напряжения в ветвях) и воздействия, узловые токи, в узловой сети, как бы двойственной к графу  $K_{3,3}$

Токи и напряжения в узловой сети, которая должны быть двойственной к графу  $K_{3,3}$

$j \underline{I}_c^\alpha = j \underline{E}_{c\alpha}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1/9
	5	11	4	5	7	-7	-4	2	1	

Токи и напряжения в ветвях должны подчиняться законам Кирхгофа; это является проверкой правильности решения. Для исходной сети непланарного графа  $K_{3,3}$  легко проверить по сети, что сумма токов в узлах равна нулю, и сумма напряжений по каждому контуру равна нулю, т.е. законы Кирхгофа выполняются.

Проведем проверку законов Кирхгофа для узловой сети, которая соответствует ортогональной матрице преобразования, и является должна быть двойственной сетью для непланарного графа. Значения откликов для этой сети показаны на рис. 8. Первый закон: сумма токов в узлах равна нулю, с учетом источников тока. Токи, входящие в узел, со знаком плюс, выходящие – со знаком минус. Для сети должно быть, что  $\sum^j I_c^\alpha = 0$ :

узел G:  $-jI_c^2 - jI_c^4 - jI_c^5 = (-11 - 7 - 5)/9 = -23/9$ . Это не равно сумме источников в узле, равной  $+jI_0^2 + jI_0^5 = 1 + 2 = 3$ ; для баланса из узла должен выходить ток  $-4/9$

узел H:  $-jI_c^1 - jI_c^3 + jI_c^5 + jI_c^8 + I_0 - I_0^5 = (-5 - 4 + 7 + 2 + 1 - 1)/9 = 0$  – выполняется;

узел K:  $+jI_c^2 + jI_c^3 - jI_c^7 - jI_c^9 - jI_0^2 = (+11 + 4 + 4 - 1)/9 - 2 = 18/9 - 2 = 0$  – выполняется;

узел L:  $+jI_c^4 + jI_c^6 + jI_c^7 - jI_c^8 = (+5 - 7 - 4 - 2)/9 - 1 = -8/9$  – не выполняется, в контурной сети здесь получилось  $+8/9$ ;

узел M:  $+jI_c^1 - jI_c^6 - jI_c^9 - I_0 = (+5 + 7 + 1)/9 - 1 = +4/9$  – не выполняется, из узла должен выходить ток  $4/9$ , в контурной сети здесь получилось должен входить ток  $-4/9$ .

Также, как и в контурной сети, в узлах G, L и M закон Кирхгофа не выполняется. Значения дисбаланса токов в этих узлах показывают, что они имеют противоположные знаки, чем в контурной сети, как будто существует невидимое дополнение к этой сети. Эти внешние токи показаны на рисунке двойным пунктиром.

Второй закон Кирхгофа: сумма напряжений в ветвях,  $^j E_c^\alpha$ , равна сумме воздействий (источников напряжения)  $^j E_0^\alpha$  в каждом контуре. Знаки определяются ориентацией напряжений на ветвях относительно направления контура. Для сети на рис. 8 это равенство имеет вид:  $\sum^j E_c^\alpha = \sum^j E_0^\alpha$ . Баланс напряжений в контурах получим следующий:

- контур 5':  $-^j E_c^2 + ^j E_c^3 + ^j E_c^5 = (-11 + 4 + 7)/9 = 0$ .
- контур 6':  $+^j E_c^1 + ^j E_c^2 - ^j E_c^3 - ^j E_c^4 + ^j E_c^6 = (+5 + 11 - 4 - 5 - 7)/9 = 0$ .
- контур 7':  $-^j E_c^1 + ^j E_c^3 + ^j E_c^4 + ^j E_c^7 = (-5 + 4 + 5 - 4)/9 = 0$ ;
- контур 8':  $-^j E_c^2 - ^j E_c^3 + ^j E_c^4 + ^j E_c^8 = (-11 + 4 + 5 + 2)/9 = 11 - 11 = 0$ ;
- контур 9':  $-^j E_c^1 + ^j E_c^3 + ^j E_c^9 = (-5 + 4 + 1)/9 = 0$ ;

Т.е. по всем контурам выполняется второй закон Кирхгофа.

### Обсуждение

Для каждого непланарного графа существует решение для сети, каждая из которых похожа на второй непланарный граф. Для двойственной сети каждого непланарного графа можно рассчитать токи и напряжения в контурном и узловом варианте, т.е. при внутренних и внешних воздействиях. Это указывает на то, что какая-то сеть существует, и в ней протекают потоки как в контурной сети, так и в узловой сети.

Однако баланс токов и напряжений в этой сети, похожей на второй непланарный граф  $K_5$ , имеет некие скрытые связи, которые в данной структуре отобразить нельзя. Можно предположить, что в этой «точке структурной сингулярности» двойственные к непланарным графам как-то связаны между собой.

### Заключение

Полученные решения для двойственных сетей, вместе с матрицами преобразования двойственных сетей использовали для того, чтобы попытаться понять, как устроена структура двойственного графа к непланарному графу, который не должен существовать. Получается, что два непланарных графа,  $K_{3,3}$  и  $K_5$ , по своей структуре похожи на двойственные друг к другу, но весьма необычным образом.

Возможно, что одна ветвь принадлежит при двойственном переходе одновременно к двум графам, что может играть определенную роль для установления границы между двумя пространствами.

Исследование противоречий инварианта мощности в тензорном методе, показавшем практическую применимость, показало, что надо искать решение «в другой плоскости», в соответствии с диалектикой. Для решения проблемы инварианта мощности следовало провести поиск закономерности изменения рассеиваемой мощности при изменении структуры, в частности, при изменении соединения ветвей в электрической цепи.

Найденная закономерность постоянства мощности при изменении структуры двойственных сетей не следует из ранее известных теоретических положений и экспериментальных фактов. Это самостоятельная физическая закономерность, которая определяется свойствами структуры и проявляется при прохождении потока энергии в электрической цепи.

Для решения противоречий, связанных с двойственными сетями и непланарными графами также нужен выход на какое-то новое «измерение», новое знание. Сама проблема, как показал автор, на вид понятна, проста и наглядна, но решения на сегодня не имеет. Это одна из наиболее фундаментальных проблем, требующих исследования. Можно ожидать, что

ее решение даст путь к открытию новых свойств нашего мира, связанных с законами структуры в основании технических, экономических, биологических систем.

### Литература

1. Крон Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика). М.: Наука, 1972. – 544 с.
2. Крон Г. Тензорный анализ сетей: Пер. с англ. /Под ред. Л.Т. Кузина, П.Г. Кузнецова. М.: Сов. Радио, 1978. – 720 с.
3. Hoffmann B. Kron's method of subspaces. – Quart. Appl. Math., 1944, v.11, oct., p.218–231.
4. Hoffmann B. Kron's Non-Riemannian Electrodynamics. – Rev. Mod. Phys. (Einstein's 70-th birthday commemorative issue), 1949, v. 21.
5. Куратовский К. Топология. Пер. с англ. т. 1, М.: 1966.
6. Roth J.P. An application of algebraic topology to numerical analysis. On the existence of a solution to the network problem. – Proc. National Acad. of Sciences, v. 41, – 76 1955, pp. 518–521.
7. Roth J.P. An application of algebraic topology: Kron's method of tearing. – Quart. Appl. Math., 1959, v. 17, № 1. – pp. 1–24.
8. Хэпп Х.Х. Диакоптика и электрические цепи. М.: Мир, 1974.
9. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. /ред. В.А.Горбатов. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
10. Петров А.Е. Тензорная методология в теории систем. – М.: Радио и связь, 1985. – 152 с.
11. Петров А.Е. Тензорный анализ сетей и параллельные вычисления. М.: МИФИ, препринт 047-91, 1991. – 24 с.
12. Петров А.Е. Тензорный метод двойственных сетей. М.: ООО ЦИТиП, 2007. – 496 с. Дополненное интернет-издание. – 602 с. Режим доступа: <http://www.mtas.ru/upload/library/Petrov2009.pdf>, <https://cosmatica.org/library/61-a-e-petrov-tenzornyj-metod-dvoistvennyh-sistem.html>, 2009.
13. Петров А.Е. Тензорный метод расчета сложных систем и инвариантность мощности. В кн.: Математические основания теории сложных систем. Иваново, 1989. – с. 37–44.
14. Петров А.Е. Тензорный метод и параллельные вычисления. – В сб.: Научно-технические средства информатизации, автоматизации и интеллектуализации в народном хозяйстве. – М.: Знание, 1991. – с. 43–54.

15. Петров А.Е. Параллельный алгоритм расчета систем по частям тензорным методом. В кн.: Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях. Новосибирск, СОАН, 1989. – с. 155–157.
16. Петров А.Е. Применение тензорного метода для прогнозирования развития сложных систем. Труды XX–XXII Чтений, посвященных разработке научного наследия и развития идей К.Э. Циолковского. М: 1989. – с. 16–23.
17. Петров А.Е. Об основах геометрии взаимодвойственных сетей. Там же. – с 30–34.
18. Петров А.Е. Инварианты двойственных сетей. Сборник научных трудов «Научная сессия МИФИ-2000», т. 3, М.: МИФИ, 2000. – с. 200–201.
19. Петров А.Е. Применение двойственных сетей для параллельных вычислений. Сборник научных трудов «Научная сессия МИФИ-2000», т. 3, М.: МИФИ, 2000. – с. 202–203.
20. Петров А.Е. Тензорный метод и физическая экономика. Сборник трудов II Международного симпозиума «Пространство и Время в эволюции глобальной системы «Природа – Общество – Человек». Геоцивилизационные вызовы и новые технологии». Москва. 2003. Альманах «Восток» О ситуации в России Режим доступа [http://www.situation.ru/app/j\\_art\\_929.htm](http://www.situation.ru/app/j_art_929.htm) свободный, 2005.
21. Петров А.Е. Тензорный метод двойственных сетей. Сб. трудов научно-технической конференции с международным участием. Технологии информатизации профессиональной деятельности – 2004». Ижевск, 2005 – с. 109–128.
22. Петров А.Е. Тензорный метод и двойственные сети в электротехнике. Электротехника, №12, ноябрь, 2008. – с. 2–12.
23. Петров А.Е. Двойственные сетевые модели больших систем. Сборник «Управление большими системами», Институт проблем управления РАН, 2010. / Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 "Сетевые модели в управлении". М.: ИПУ РАН, 2010. С. 76–90. Режим доступа: [http://ubs.mtas.ru/archive/search\\_results\\_new.php?publication\\_id=18080](http://ubs.mtas.ru/archive/search_results_new.php?publication_id=18080), свободный. Дата опубликования: 15.11.2010. Рубрика: Математика сетей.
24. Петров А.Е. Сетевые методы планирования производства: учебно-методическое пособие. – М.: МГГУ, 2010. – 148 с.
25. Петров А.Е. Тензорный метод Крона, ЛТ метод Бартини-Кузнецова, двойственные сети и диалектические противоречия. Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление. Электронное научное издание, том №7, № 3 (12), 2011. Выпуск подготовлен по итогам Международной конференции по фундаментальным проблемам

- устойчивого развития в системе природа – общество – человек (24 и 25 октября 2011 г., проект РФФИ №11-06-06128-г). Режим доступа: <http://rypravlenie.ru/?p=104>, свободный, 2011. – с. 46-88.
26. Максвелл Дж. К. О физических силовых линиях. //Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. Пер. с англ./Под ред. П.С. Кудрявцева. – М.: ГИТТЛ, 1954.
  27. Копылов И.П. Электрические машины: Учеб. для вузов. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. Шк.; Логос; 2000. – 607 с.
  28. Петров А.Е. Свойства структуры и живые системы: сетевая модель экономики как механизм работы живого организма. Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление», [www.rypravlenie.ru](http://www.rypravlenie.ru), том 12 № 3 (32), 2016, ст. 3. – с. 64–84.
  29. Петров А.Е. Тензорный метод двойственных сетей для расчета сложных систем по частям. М.: МГГУ, Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал) Mining Informational and analytical bulletin (scientific and technical journal). - УДК: 338.26.015: 658.5, М.: Издательство «Горная книга». ISSN: 0236-1493. – №3, 2017. с. 168-192.
  30. Петров А.Е. Тензорный метод расчета систем с переменной структурой. УДК: 004.8 + 519.86. Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление», ISSN 2075-1427. [www.rypravlenie.ru](http://www.rypravlenie.ru), том 14 № 4 (41), 2018, ст. 1. – с. 1–19. <http://www.rypravlenie.ru/wp-content/uploads/2019/01/01-Petrov.pdf>  
<http://www.rypravlenie.ru/?p=3322>
  31. Петров А. Е. Закон сохранения мощности в двойственных тензорных сетях Г. Крона – А. Петрова (в пространстве, времени и структуре). Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление», ISSN 2075-1427. [www.rypravlenie.ru](http://www.rypravlenie.ru) том 15 № 1 (42), 2019, ст. 1 – с. 1–39. <http://www.rypravlenie.ru/?p=3356>
  32. Петров А.Е. Особенности преобразования величин в двойственных сетях // Сетевое научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление». 2022. Т. 18, вып. 1 (54) – с. 1–13. URL: <http://www.rypravlenie.ru/?p=3878>.
  33. Петров А.Е. О законе сохранения потока энергии. // Сетевое научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление». – ISSN 2075-1427, – Режим доступа: <http://www.rypravlenie.ru/wp-content/uploads/2022/10/01-Petrov.pdf>, 2022. Т. 18, вып. 3 (56), ст. 1. – с. 1–6.

34. Petrov A.E. Tensor Network Model of Logistics System. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2022. Vol. 12, no. 3, pp. 5–24. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2022120301> (In Engl., abstr. in Russ. Петров А.Е. Тензорная сетевая модель системы логистики. Моделирование и анализ данных. ISSN: 2219-3758, ISSN: 2311-9454 (online). 2022. Том 12. № 3. 5–24.
35. Петров А.Е. Закон сохранения потока энергии и двойственность пространства // Сетевое научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление». 2022. Т. 18, вып. 4 (57). URL: <http://www.rypravlenie.ru/?p=3990>.
36. Петров, А. Е. Тензорная методология моделирования сложных систем. Теоретические основы (N 4664): учебник / А. Е. Петров; НИТУ МИСИС, Ин-т информационных технологий и компьютерных наук, Каф. автоматизированного проектирования и дизайна. — М.: Изд-во МИСИС, 2023. — 205с.: рис. + Библиогр.: с. 181-186. - Прил.: с. 187-205. — Режим доступа: [http://lib.msk.misis.ru/elib/view.php?id\\_abs=987768402](http://lib.msk.misis.ru/elib/view.php?id_abs=987768402). — ISBN 978-5-907560-27-7.

*Статья подготовлена по результатам исследований, выполненных за счет средств федерального бюджета по государственному заданию «Разработка новых междисциплинарных методов, цифровых моделей и инструментов, организационных технологий мониторинга и управления устойчивым социально-экономическим и энерго-экологическим развитием и качеством жизни населения регионов, специализирующихся на сельском хозяйстве»; код научной темы, присвоенной учредителем, — FZRN-2025-0005.*